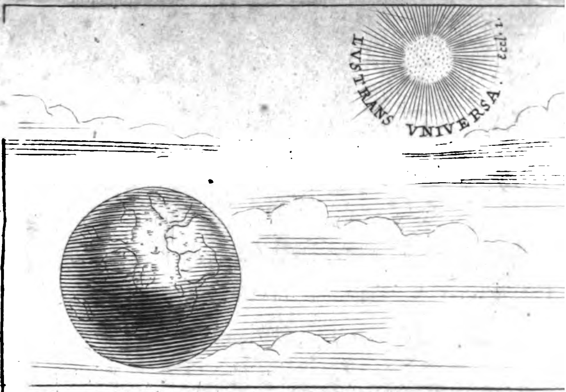
Euclides

D. J. B. C. Garciacale
leon
a. 4 gr.

890



Perspicacissimo Geometriæ Illustratori
(quantumvis Cæco)
Dom.° Sebastiano Fernandez de Medrano.
Georgius P. Verboom
Discipulus eius Præceptori Suo, et autori
huius hoc ænigma refert. Anno 1688.

Sol, oculus mundi, cæcus licet, omnia lustrat.
Cæcus et illustrans omnia, qualis erit?
Sol nihil ipse videns, omnes facit esse videntes.
Me quoque qui fecit, Sol erit ille mihi.

LOS SEIS PRIMEROS LIBROS,

ONZE, Y DOZE

DE LOS

ELEMENTOS

DE

EUCLIDES

MEGARENSE.

LOS SEIS PRIMEROS LIBROS, ONZE, Y DOZE DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES MEGARENSE:

Augmentados de muchas Propoſiciones curioſas que facilitan ſu uſo.

DIRIGIDOS

Al. Excelentiſſimo Señor MARQUES DE BEDMAR, Capitan General de la Artilleria del Exercito de los Payſes Baxos.

Por el Capitan Don SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO, *Maeſtro de Mathematicas por ſu Mageſtad en dicho Exercito.*

EN BRUSSELAS,
En Caſa de LAMBERTO MARCHANT, Mercader de Libros.

M. DC. LXXXVIII.

AL EXCELENTISSIMO SEÑOR D. ISIDRO DE LA CUEVA, Y BENAVIDES, MARQUES DE BEDMAR,

Capitan General de la Artilleria del Exercito de los Payſes-Baxos.

EXCELENTISSIMO SEÑOR,

Naturalmente el que ſe precia de agradecido, buſca ſiempre el deſempeño de recividos beneficios, y para eſto ſe vale de todos medios. Muchos havia meneſter yo (Excelentiſſimo Señor) para recompenſar en parte, el mas minimo de los infinitos que he recivido, y recivo cada dia de la liberalidad de V. E. y ya que mi corto caudal no pueda manifeſtarlo en otra coſa, lo ago en aquello que mi pobre talento puede dar de ſi, buſcando con eſta nueva traducion de la Geometria eſpeculativa del Philoſofo Euclides, ſea ſu patrocinio V. E. que aunque es una de las ultimas obras que he impresso, es la radical de donde dimanan las antecedentes, respecto que todas las disciplinas Mathematicas toman de aqui su origen. Pues sale de ella la nobleza de la Architectura Militar y Civil, uso de la Artilleria, formacion de Esquadrones, Prespectiva, Optica, Statica, y ultimamente la subtil Astronomia, Geographia, y Idrographia, ò Arte Nautico; todas cosas tan utiles al servicio publico, que por conocer su importancia, hazen, y hizieron estimacion de estas sciencias, los mas Ilustres Varones Politicos, y Guerreros; y la experiencia nos enseña que los mayores campiones alcançaron señaladas victorias, mas por su virtud, y prudencia, que por las fuerças: digalo aquel exercito Pompeyano que entre los Rios Ebro, y Segre, constriño, y redujo con su industria el gran Cesar à tal estado, que le obligò à pedir misericordia sin derramar gota de sangre; y el valeroso Scipion connominado Africano el menor (por haver destruido à Cartago) cuya sagacidad, y buena diciplina triumphò de

Nu-

Numancia ſin conbatirla; lo que no hizieron diverſos Capitanes Romanos en los muchos rencuentros que con deſcredito ſuyo tuvieron con los Numantinos, en el largo tiempo que havian tenido ſitiada ſu Ciudad.

No vive V.E. fuera de eſte conocimiento ſupueſto conſtarme tiene tanta inteligencia en dichas Artes, que con propiedad poſſee la forma de Eſquadronar, Fortificacion, manejo y proporcion de la Artileria, y uſo de las cartas Geograficas; ſiendo muy de la rectitud de V.E. venerar ſciencia que tiene por objeto el de demonſtrar la verdad; motivo, porque ſe declara V.E. tan favorecedor de todos aquellos que ſe dedican à profeſſar dichas facultades, ſiendo protector de eſta Academia, como muchos dicipulos de ella han ya experimentado; lo que ocaſiona en V.E. el grande afecto que tiene al real ſervicio, y lo verifica ver quan temprano (ſiendo unico de ſu caſa) ſe dedicò à el, paſando el año de 71. à ſervir con una pica al Eſtado de Milan, haviendo continuado haſta oy con el deſempeño (de los dignos empleos que

ha

ha tenido) que ſe podria eſperar de perſona como V. E. de quien, ſi no eſtuviera cierto ofendiera ſu modeſtia. Pudiera decir aqui el profundo zelo, y vigilancia que todos han experimentado en las ocaſiones que ſe han ofrecido. En fin todo es à imitacion de los Iluſtres Progenitores de la antigua caſa de V. E. que es la legitima de la Cueva, en la qual ſi (como eſtoy ciego) fueſſe yo Curcio, y con ojos de Argos rezelara entrar en ella à inveſtigar ſu origen, por eſta cauſa, y ſer por ſi tan eſclarecida, y haver y luſtrado ſus eſcritos con ella los mas inſignes Coroniſtas dejarè à ellos el proſeguir eſta empreſſa, y la de cantar los loores que con ſingular aplauſo gòza de todos en eſte Exercito V. E. cuya Excelentiſſima, Perſona guarde Nueſtro Señor los muchos años que deſſeo, y ſus criados hemos meneſter. Bruſſelas à 23. de Noviembre de 1687.

EXCELENTISSIMO SEÑOR,

A los Pies de V. E. ſiempre,

DON SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO.

AL LECTOR.

EN mis Libros antecedentes (Curioso Lector) te he presentado lo mas util que de la Mathematica pertenece al bien publico, y en particular à un militar, como la formacion de esquadrones, uso y manejo de la Artilleria, Geometria Practica, Fortificacion, y Geographia, &c. Y siendo el orijen de todas estas partes, la Geometria especulativa; me pareciò acertado sacarla à luz, paraque no carezcas de lo radical de esta doctrina, porque, aunque sea verdad, que Luis Carducho, y D. Rodrigo Zamorano, escrivieron de estos Elementos en nuestro idioma, fue solo los seis primeros Libros con confusion de citas, y estilo poco comprehensible (lo que me consta por experiencia de mi Academia.) Y aunque assi mesmo escriviò

de

de ellos el Padre Zaragozà con toda perfeccion, todavia fue formando nueva orden en la colocacion de las Proposiciones que sigue Euclides en sus Elementos, razon porque es dificil citar por el, respecto que lo entenderàn solo aquellos que ayan estudiado sus obras, y luego que su heroyco y realzado estilo, no es para que vulgarmente lo entiendan todos; y assi como yo aya llegado à conocer lo que importa escrivir para todos, hallè por acertado presentarte estos Elementos, de los quales, con mediana aplicacion te haràs en breve inteligente. Y porque à todo principiante le es este estudio muy seco, propongo al fin de cada Libro algunas questiones curiosas; que sirvan para aprovecharse de esta doctrina, y saver usar de ella, sirviendote despues de su grande utilidad para todas cosas; pero advierto que los Principios como Axiomas, Definiciones, &c. sean bien comprehendidas, para entrar con facilidad en el primer Libro, en que trata Euclides de la propiedad de los triangulos, lineas paralelas, enseñando los Problemas necessarios para la construcion de toda figura, siendo despues facil proseguir en esta

fa-

facultad, en que desearè verte capàz paraque tengamos en España personas de quien poderse valer en lo necessario de esta sciencia.

Nota que el decimo Axioma le trahe Euclides en su 12. pero por seguir yo algun autor de quien me he valido, las dexè assi como el las trahe, pero paraque sirvan, lo mesmo es que esten en un lugar que en otro, como se citen à tiempo: y veràs en este discurso. Y si al fin no hallares la obra tan à tu satisfacion como yo quisiera, suplirà tu piedad mis hierros, admitiendo por disculpa, que siendo cierto que me seria facil cometerlos con vista, me lo serà mucho mas estando sin ella, como lo estoy haviendo escrito assi Libros de diferentes materias.

AVI-

AVISO
AL
ENQUADERNADOR.

La 1. y 2. Eſtampa ſe pondràn al fin del primer Libro.
La 3. al fin del 2.
La 4. y 5. al fin del 3.
La 6. al fin del 4.
La 7. al fin del 5.
La 8. y 9. al fin del 6.
La 10. al fin del 11.
Y las de mas al fin del Tomo.

Quedando todas de ſuerte que enteramente puedan ſalir fuera del Libro.

AD-

DECLARASE QUE COSA SEA MATHEMATICA.

LA Mathematica es ciencia que trata de la cantidad continua, y discreta. Dividese en muchas partes, siendo quatro las principales, y dos las absolutas; Estas son la Arithmetica, que trata de la cantidad discreta, propriedad, y calidad del numero; y la Geometria, que trata de la cantidad continua: las otras dos se atribuyen à la Musica, que como la Arithmetica, discurre de la cantidad discreta, haziendo comparacion de un numero à otro, guardando la proporcion Harmonica: y la Astronomia, que tambien como la Geometria trata de la cantidad continua, y porque estas dos ultimas se explican en numeros, y lineas, se les dà titulo de mixtas;

 to-

todas las demas partes de la Mathematica, como Perſpectiva, Geographia, y Optica &c. ſe agregan à una de las quatro referidas: y porque de lo que trata eſte volumen es ſolo de la Geometria, dirè cómo el objecto de eſta ſon lineas, ſuperficies, y cuerpos, para cuya conſtrucion, y demonſtracion, ſe uſa de terminos que neceſſitan de explicacion, ſera bueno darla àqui antes de paſſar adelante.

Adviertenſe algunos terminos, para la Geometria.

Intervalo, ò *magnitud* es la grandeza, ò longitud de una linea.

Problema, llama el Mathematico al enſeñar, hazer, ò conſtruyr qualquiera coſa, y diferenciaſe de lo que llama Problema el Philoſopho, en que el de eſte es una Propoſicion dudoſa y que tiene contradicion, pero el Problema Mathematico es evidente.

Theorema, es la de monſtracion, y contemplacion de qualquier coſa que ſe propone, y tiene tal conexion con el Problema, que ſon inſeparables, reſpecto

cto que el Problema representa la figura propuesta à demonstrar, y tanto el Problema como el Theorema se dizen Proposiciones.

Corolario, es una consequencia de doctrina, y advertencia de lo que se puede executar por lo ya demonstrado.

Scholio, es la Anotacion que al fin de alguna Proposicion de Euclides, hazen sus comentadores de passo.

Lemma, es una nueva proposicion que demonstrada se apropia para demonstrar alguna Proposicion de las que le siguen.

Quando se nombrare algun Angulo, por tres letras, se hà de entender ser el Angulo el de la letra que se mencionare en medio de las tres.

Quando una figura quadrilatera, ò de quatro lados, se quiere nombrar con pocas letras, se haze con solas dos, colocadas en Angulos opuestos diametralmente.

Para no ocupar margenes me parecio poner las citas en los mesmos Renglones, y para que sean mas bien entendidas, digo que à un lado y otro de una l. ay un numero; el primero cita la Propoſicion, la, l. el libro, y el ſegundo numero declara ſi es primero ò ſegundo, &c. Exemplo, hallando una cita en eſta figura(*4.l. 6.*)ſe entenderà citar por la Propoſicion quarta del libro ſexto, y aſſi de las demas. Pero hallando un numero ſolo, ſe hà de entender ſer la Propoſicion del meſmo libro de que ſe trata.

Si la cita fuere marcada con eſta figura (*d. 4. l. 5.*) querrà dezir definicion quarta del libro quinto; y ſi fuere con eſta (*a. 3.*) dirà Axioma tercera: ſi fuere con eſta (*p. 2.*) dirà Peticion ſegunda. Y en concluſion eſta (*c. 8. l. 6.*) dirà Corolario de la ottava del ſexto, y aſſi de las demas.

Enterado el curioſo de eſtas advertencias, darà principio al Eſtudio deſtos Elementos, tomando de memoria las Definiciones, Maximas, y Peticiones, que ſiguen, que ſon los principios fixos, y évidentes deſta ſciencia; con los quales ſe de mueſtra todo ſin contradicion alguna. Y advierto que lo que fuere explicacion y añadido del Autor ira lo mas en letra curſiva.

LI-

LIBRO PRIMERO.

DEFINICIONES.

1. El Punto no tiene parte alguna.

PUnto es el extremo fin, ò termino de una linea, y le conciben los Mathematicos con ſolo el entendimiento, ſin darle cantidad alguna, de latitud, longitud, ni profundidad; y enfin no le permiten que ſea la mas minima coſa; mas como en el Acto practico ſea preciſo hazerle phiſico, y aparente para las operaciones neceſſarias, ſe tiene por la ſeñal que la mas ſutil pluma puede exprimir.

2. La Linea, es una longitud ſin hanchura.

La Linea, es engendrada del fluxo que hiziera el punto, ſi ſe movieſſe de un lugar à otro, ò meramente una longitud conſiderada con la imaginacion ſin latitud, ò hanchura, ni profundidad.

3. Los extremos de una Linea son puntos.

Dijose en la explicacion del punto como este era el extremo de una linea, de que se infiere que sus dos extremos seràn puntos, como dize la definicion.

4. La Linea recta es aquella que està igualmente estendida entre sus puntos extremos.

La Linea recta se hà de entender por la mas corta que và de un punto à otro, exemplo en la Figura primera Estampa primera, donde la linea que và de A, à B, es mas breve que la curba A C B, que tiene los mesmos terminos.

5. Superficie es aquella que tiene longitud, y latitud solamente.

La Superficie es una cantidad que contiene dos dimenciones como longitud, y latitud, sin profundidad, y aunque muchos Authores la difinen diversamente, en sustancia es lo dicho.

6. Los extremos de las supeficies son Lineas.

Como el punto es termino de la Linea, assi esta lo es de las superficies.

7. Superficie plana, es aquella que esta igualmente estendida entre sus lineas extremas.

Superficie plana llaman los Mathematicos aquella que està igualmente estendida entre sus lineas, sin que en este espacio aya alguna parte mas élevada que otra.

8. Angulo plano, es la inclinacion de dos lineas que concurren en un punto, no directamente en un mesmo plano.

El Angulo plano es constituido de dos lineas que concurriendo en un punto dado en un plano, no forman las dos una linea recta, y segun fuere la inclinacion de las lineas, serà la capacidad, ò abertura del Angulo mayor, ò menor, no aumentando, ni disminuyendo por lo largo, ò corto de sus lineas, las quales aunque corran al infinito, no alteran la dicha abertura.

9. Si las dos Lineas que forman el Angulo fueren rectas, el Angulo serà rectilineo.

Quando el Angulo plano es formado de dos lineas rectas, se dize Angulo rectilineo como A, de la *la Figura 2. dicha Eſtampa: ſi de dos curbas como C, curbilineo, y quando de una recta, y otra curba, mixto como B.*

10. Quando una Linea recta cae ſobre otra recta haze los Angulos de una y otra parte iguales, los Angulos ſeran rectos, y la Linea que cayò ſobre la otra le ſerà perpendicular.

Aqui define Euclides el Angulo recto, que es el que ſe forma de dos rectas que verticalmente cae la una ſobre la otra, como la D C, (Figura 3.) que cae derechamente ſobre la A B, ſin inclinarſe à una ni otra parte, formando los Angulos D C B, y D C A, iguales, y en eſte caſo ſe dizen rectos, y eſtar la D C, perpendicular à la A B, ò à ſus partes C B, A C, y por conſequencia qualquiera de ellas à la D C.

11. El Angulo obtuſo es aquel que es mayor que un recto.

12. El Angulo agudo es menor que un recto.

No ſiempre cae una linea recta perpendicular ſobre otra, mas ſi inclinandoſe à una, ò à otra parte, como haze la E C, dicha figura, la qual for-

forma con la A B, dos Angulos iniguales, y el mas abierto A C E; y que excede al Angulo recto, se dize obtuso, y el mas cerrado E C B, y que no llega al recto, agudo.

13. Termino es el extremo de una cantidad.

En esta definicion se encierra lo que es termino, de que ay tres especies, como el punto que lo es de la linea, esta de la superficie, y la superficie del cuerpo.

14. Figura es aquella que esta cerrada de uno, ò muchos terminos.

Figura se dize à una superficie, ò cuerpo, comprendido entre sus terminos, de que se infiere que hà de estar cerrada por todas partes, y assi la linea, ni el Angulo tendràn nombre de figuras.

15. Circulo es una figura plana, terminada de una sola linea llamada circonferencia, distante igualmente por todas partes de un punto que tiene en medio, del qual todas las lineas que salen de el, y se terminan en la circunferencia, son iguales entre si.

16.

16. Eſte punto de en medio ſe llama centro.

Circulo es una figura ſuperficie Plana, terminada de una ſola linea, dicha circonferencia, ò peripheria, como A B C F D, de la figura 4. deſcrita de un punto que tiene en medio E, llamado centro, y quantas lineas rectas ſalen de el, y ſe terminan en la circunferencia como A E, E B, E C, ſon iguales entre ellas, y nombranſe Radios, ò ſemidiametros. Tiene eſta figura por excelencia el encerrar con un meſmo Ambito, mas eſpacio que otra alguna.

17. Diametro del circulo es la linea recta que paſſando por el centro ſe terminan ſus extremos en la circunferencia, y divide el circulo en dos partes iguales.

El diametro A C. (dicha figura) es la mayor linea de las rectas que ſe pueden tirar dentro del circulo, y como dize la difinicion, es manifieſto que divide el circulo en dos partes iguales, pues de otra manera no ſerian las lineas que del centro van haſta la circunferencia iguales, y fuera contra ſu definicion.

18.

18. El medio circulo es una figura terminada por el diametro, y la mitad de la circunferencia.

Esta definicion consta de lo dicho en la antecedente, porque se dixò en su explication, como el diametro dividia el circulo en dos partes iguales que dizen semicirculos ò mitades del circulo, tal serà ADFC, dicha figura y assi el otro.

19. Porcion, ò segmento de circulo, es una figura comprendida de una linea recta, y parte de la circunferencia.

Llamase Porciòn, ò segmento de circulo qualquiera parte de el, comprehendida de una linea recta, y una Porcion de la circunferencia quando la recta DF, (dicha figura) no es el diametro, sino otra linea que no passe por el centro: y à la parte que encierra en si el centro, dizen Porcion mayor, y à la otra menor, como declara Euclides en el libro tercero.

20. Figura rectilinea es aquella que està comprehendida de lineas rectas.

Figura rectilinea es la cerrada, y terminada con lineas rectas, a diferencia del circulo que lo està

està de una curba, ò de otra que lo estè de lineas curbas, que à una y otra se diràn figuras curbilineas, y à la que lo fuere de curbas y rectas, mixta.

21. Figuras de tres lados son aquellas, que estan cerradas y formadas de tres lineas rectas.

Triangulo es una figura formada de tres lados; dizese al que lo esta de lineas rectas, rectilineo, al de curbas, curbilineo; y al que de dos rectas y una curba, ò de dos destas, y una recta, mixto; de estos dos ultimos no trata Euclides en sus Elementos: y de los rectilineos, ay tres generos como se dirà adelante..

22. Figura quadrilatera es la que esta comprehendida de quatro lineas.

De las figuras quadrilateras, que son las formadas de quatro lados, se deve entender lo mesmo que de los triangulos, llamando à las de lineas rectas, rectilineas, &c. y luego se hablarà de sus generos.

23. Figuras multilateras, ò de muchos lados, son las que tienen mas de quatro lineas.

A todas las figuras de mas de quatro lados, llama Euclidès, multilateras ò de muchos lados y usando de la voz griega Poligon, y por esto los Geometras comunmente las nombran segun la cantidad de sus Angulos, diziendo Pentagono, à la de cinco, Exagono, à la de seis, y Eptagono, à la de siete, &c.

24. De las figuras de tres lados, là que tiene los tres iguales se dize Equilatero.

25. Triangulo Isoceles, es aquel que tiene solamente dos lados iguales.

26. Escaleno, aquel que tubiere sus tres lados desiguales.

27. De las figuras de tres lados, à la que tiene un Angulo recto, se dize triangulo rectangulo.

28. Ambligonio, à el que tiene un Angulo obtuso.

29. Oxigonio, aquel que tiene sus tres Angulos agudos.

Estas seis definiciones ultimas enseñan que el Triangulo se nombra por la grandeza de sus li-

lineas, ò abertura de sus Angulos, y assi al Triangulo A, de la figura 5. que tiene sus tres lados iguales, diremos equilatero, nombrandole segun la grandeza de sus lineas; al marcado B, que tiene dos lados iguales, y el otro desigual, isoceles; y al Triangulo C, formado de tres desiguales, Escaleno. Y haviendolos de nombrar por la abertura de sus Angulos, diremos al Triangulo A, Oxigonio, ò acutangulo; àl de B, que tiene un Angulo recto, Triangulo rectangulo; y finalmente al de la letra C, que contiene un Angulo obtuso, Triangulo ambligonio, ò obtusangulo.

30. A las figuras de quatro lados, la que tubiere los quatro lados yguales, y sus quatro Angulos rectos, se dice quadrado.

31. Quadrilòngo, es el que tiene quatro Angulos rectos, y sus lados desiguales.

32. El Rombo, tiene los quatro lados iguales, y no sus Angulos rectos.

33. El Romboyde tiene sus lados y Angulos opuestos iguales sin ser de Angulos rectos.

De

De las figuras quadrilateras son estas quatro las mas regulares, llamando quadrado (como dize la difinicion) à la que tiene los quatro Angulos rectos, y sus quatro lados iguales, tal es A, (figura 6.) el quadrilongo B, tiene tambien los quatro Angulos rectos, como el quadrado, mas todos sus lados no son iguales si bien lo son los opuestos. El Rombo C, (figura 7.) tiene sus quatro lados, como el quadrado, iguales; pero los Angulos no son rectos. Mas si los opuestos iguales, y el Romboyde D, tiene sus lados, y Angulos desiguales; pero tanto los lados como los Angulos opuestos son iguales. A qualquiera de estas figuras, la linea tirada de un Angulo à otro opuesto, dizen Diametro, ò Diagonal.

34. Toda otra figura de quatro lados, se llama Trapezio.

Despues de las quatro difiniciones antecedentes, difine Euclides todas las demas de quatro lados, llamandolas Trapeces de que unas son mas regulares, que otras.

35. Lineas Paralelas, son las rectas que distando igualmente unas de otras, por todas partes, y prolongadas al infinito, por uno, ò otro lado en un mismo plano, no concurriran jamas.

La

La calidad de las Lineas Paralelas, es que quando dos, ò mas rectas tiradas en un mesmo plano, estan equidistantes, ò igualmente apartadas por todas partes unas de otras, no concurriran aunque se prolonguen al infinito, por uno ò otro lado, ò por entrambos, antes si guardaràn siempre la mesma igualdad en su apartamiento. Exemplo en las dos rectas A B, C D, (figura 8.) que por todas partes distan una de otra la magnitud de E F, y esta mesma guardaran continuamente, prolongadas al infinito. Pero E F, ha de ser perpendicular porque las primeras son intervalo determinado. Hasta aqui son difiniciones del primero libro de Euclides, y los Geometras para mas intelligencia, añaden las dos siguientes, respecto ser muy à proposito en los Elementos.

36. Paralelogramo, es una figura quadrilatera, que tiene sus dos lados opuestos paralelos.

De estos Paralelogramos ay quatro especies, que son el quadrado A, (figura 6.) el quadrilongo B, (dicha figura.) El Rombo C, (figura 7.) y el Romboyde D, (dicha figura) que qualquiera tiene los lados opuestos, paralelos. Al quadrilongo B. dizen comunmente Rectangulo.

37. Los Paralelogramos por donde no passa el diametro de todo un paralelo gramo, se llaman cumplimientos.

Si en un Paralelogramo A D, (figura 9.) se tirare el diametro A D, y à cada lado de dicho Paralelogramo, una paralela que se corten en un punto como E, los dos Paralelogramos E B, E C, por los quales no passa el diametro, se dizen cumplimientos, ò suplimientos, y los otros dos por donde passa, se dizen estar al rededor del diametro.

Peticiones, ò demandas.

Peticion primera. Que se pueda tirar una linea recta de un punto à otro.

2. Que se pueda prolongar una linea recta à discrecion.

3. Que se pueda discrivir de un centro, y con qualquier intervalo un circulo.

Este permiso que aqui pide Euclides, es justo concederse, respecto no ofrecerse para ello cosa en contrario, y à estas tres Peticiones añade (segun dize Henrion,) Clavios la siguiente.

Siendo dado un grandor, ò cantidad: que se pueda tomar otra mayor, ò menor.

Con justa razon se deve conceder à Clavios, lo *que pide, pues no es dudable que restando, ò sumando, que se pueda disminuir, ò augmentar una cantidad al infinito.*

AXIOMAS, MAXIMAS,

ò comunes Sentencias.

1. Todas las cosas que son iguales, à una mesma, son iguales entre ellas.
2. Si à cosas iguales, se añaden cosas iguales, los todos seran iguales.
3. Si de cosas iguales, se quitan cosas iguales, las restas quedaran iguales.
4. Si à cosas desiguales se añaden cosas iguales, las compuestas quedaràn desiguales.
5. Si de cosas desiguales se quitan cosas iguales las restas seran desiguales.

De estos Axiomas se infieren otros muchos, que diversos Interpretes suelen añadir, como el siguiente y otros.

Si de cosas iguales se quitan cosas desiguales, las restas seran desiguales.

6. Las cosas que son duplas, triplas, ò qua-

quadruplas &c. de una mesma cosa, son iguales entre ellas.

7. Las cosas que son mitades, tercios, ò quartos &c. de otra seran iguales entre ellas.

8. Las lineas, angulos, figuras y otras cosas iguales siendo de una mesma suerte en especie, y forma, puestas unas sobre otras, convendràn ajustandose una sobre otra sin excederse. Como quadrado sobre quadrado &c.

9. El todo es mayor que su parte.

De aqui podemos inferir, y sentar por Axioma, como el todo es igual à todas sus partes juntas.

10. Todos los angulos rectos son iguales entre si.

11. Si una linea recta cayendo sobre otras dos, hiziere los angulos interiores de una mesma parte menores que dos rectos; prolongadas las dos lineas acia aquella parte concurriran.

Este Aixoma no esta recivido enteramente de algunos de los Interpretes de Euclides, por necessitar de demonstracion, y assi en su lugar ponen el siguiente.

Las lineas que ſe terminan en dos paralelas, ſiendo perpendiculares à ellas, ſeràn iguales.

12. Dos lineas rectas no encierran eſpacio.

Expreſſaſe aqui; el que las dos lineas ſean rectas, porque es evidente, que ſi una de ellas fueſſe curba que lo encerrarian, y lo meſmo haze la que forma un circulo.

13. Dos lineas rectas que ſe enquentran indirectamente, no tienen un meſmo ſegmento.

Diceſe indirectamente, porque ſi fueſe formando las dos una linea recta ſe podria tomar en ella una parte comun à las dos.

A eſtos trece Axiomas añaden otros, algunos Geometras, que yo omito por no ſer eſſenſiales.

DE

LIBRO PRIMERO.

PROBLEMA PROPOSICION PRIMERA.

Sobre una linea recta dada, y terminada, descrivir un triangulo equilatero.

SEa la linea A B, (*figura 10. Estampa prima*) del centro B, con el intervalo A B, descrivase el circulo A C D, (*p. 3.*) y con el mesmo intervalo, y centro A, el circulo B C D, que cortarà el primero en C, dense las rectas A C, B C, (*p. 1.*) digo que el triangulo A B C, serà equilatero.

Demonstracion. Porque las lineas B A, B C, son semidiametros de un mesmo circulo, seran ràn iguales *(d. 15.)* y por la mesma, seràn tambien iguales A B, A C, de que se sigue que de las dos A C, y B C, serà qualquiera ygual de A B. y iguales entre si A C, y B C, *(a. 1.)* y por consequencia el triangulo A B C, serà equilatero *(d. 24.)*

Problema Proposicion II.

Tirar de un punto dado, una linea recta, igual à otra dada.

Sea dado el punto B, *(figura 11.)* y la recta A. con cuyo intervalo, y centro B. se descrivirà el circulo D E F, *(p. 3.)* y tirando à qualquier punto de la circunferencia, del punto B. una recta, y sea B D, digo que esta serà igual à la dada A, *(d. 15.)*

Este Problema lo trahe Euclides mas laborioso, pero algo mas dificil de comprehender, y siendo tan evidente, me contentè con executarlo assi.

Problema Proposicion III.

De dos lineas rectas terminadas, y desiguales, cortar de la mayor una parte igual à la menor.

Sea la mayor de las lineas B C, *(figura 11.)* y la menor A, de un extremo de la mayor,

y

y sea de B, con el intervalo A, se descrivirà el circulo D E F, (p. 3.) que cortarà là B C, en E, digo que là B E, es igual de A, (d. 15.)

Theorema Proposicion IV.

Si dos triangulos tienen los dos lados del uno, iguales à los dos del otro, cada uno al suyo, y los Angulos comprendidos entre estos lados fueren iguales; el tercer lado serà igual al tercero, y los otros dos Angulos tambien iguales cada uno al suyo, como assi mesmo los triangulos entre si.

Sean los triangulos A B C, D E F, (*figura 12.*) que el lado E F, sea igual à B C, como D F, à A C, y los Angulos en F, y C, comprendidos destos, tambien iguales, digo que las basas A B, D E, seran iguales, como tambien los Angulos sobre las basas, es à saber, el Angulo en E, igual, al Angulo en B, y el Angulo D, al de A, y el triangulo al triangulo.

Demonstracion. Si se pusiere el un triangulo sobre el otro, de suerte que el lado E F, cayga sobre B C, se ajustaràn los extremos de entrambos en los terminos B, y C, y en tal caso, el lado D F, caberà sobre A C, sin exceder à una, ni à otra parte (a. 8.) porque si cayera dentro, ò fuerá, el angulo C, feria mayor ò menor que el Angulo F, y fuera contra la fupoficion, pues fe han dado iguales; luego fiendo precifo que los dos lados, fe ajuften fobre los otros dos, el tercero D E, caerà fobre A B, ajuftandofe en eftos terminos, no pudiendo caer dentro como la linea A G B, porque feria encerrar efpacio con dos lineas rectas, lo que es contra el 12. Axioma, ni caherà à fuera, por la mefma razon. Luego los tres lados del un triangulo, feràn iguales à los tres del otro, y lo mefmo fus Angulos cada uno à fu correfpondiente, y en conclufion el un triangulo al otro. Que es lo que fe devia demonftrar.

Theorema Proposicion V.

Los triangulos Ifoceles tienen los Angulos encima del lado defigual, iguales; y los lados iguales, fiendo continuados, los Angulos de debajo de dicho lado, lo feràn tambien.

Sea el triangulo A B C, *(figura 13.)* que tenga los lados A C, B C, iguales; prolonguenfe C B, al infinito, y C A, de una cierta cantidad, como hafta D, y cortefe C E, igual à C D, *(3.)* y denfe las lineas A E, D B, *(p. 1.)*

(p. 1.) digo que los Angulos en A, y en B, ſobre la baſa A B, ſon iguales; y entreſi lo ſon tambien los comprendidos de dicha baſa, y los lados prolongados.

Demonſtracion. En los triangulos C A E, C B D, los lados C D, C B, ſon iguales à los lados C E, C A, cada uno al ſuyo, y tienen el Angulo en C, commun, luego ſeràn iguales los triangulos en todo ſer *(4.)* y aſſi los Angulos C A E, C B D, ſeràn iguales, como tambien los Angulos en D, y en E, y porque los lados C D, C E, ſon iguales *(por conſtrucion)* quitando de ellos las partes C A, C B, que lo ſon, (*por ſupoſicion*) quedaràn iguales A D, B E. *(a. 3.)* aora en los triangulos A B E. A B D, los lados A D, D B, ſon iguales à A E, B E, cada uno al ſuyo; y los Angulos en D, y en E, ſe han moſtrado iguales, ſigueſe que los Angulos B A D, E B A, debajo de la baſa A B, ſeràn iguales, como tambien E A B, D B A, *(4.)* y quitados eſtos de los monſtrados iguales E A C, D B C, reſtaràn iguales los Angulos B A C, A B C, ſobre la dicha baſa *(a. 3.)* que es lo que ſe devia demonſtrar.

C O R O L A R I O.

Sigueſe deſta Propoſicion, que el triangulo equilatero, es tambien equiangulo.

THEO-

Theorema Proposicion VI.

Si un triangulo tiene dos Angulos iguales, sus lados opuestos lo seràn tambien.

Sea el triangulo A B C, *(figura 14.)* que los Angulos en B, y en C, sobre la basa B C, sean iguales; digo que los lados A B, A C, que sustienen dichos Angulos, seràn iguales. Y si no fuere assi, y se dijese que uno de los lados, como A B, es mayor que A C, se podrà cortar de el una parte igual à A C, *(3)* y sea B D, tirese la linea D C, *(p. 1.)*

Demonstracion. Los dos triangulos DBC, ACB, tienen los lados B D, B C, iguales à los dos A C, C B, cada uno al suyo, y el Angulo B, igual al Angulo A C B: luego los dichos triangulos seràn iguales en todo ser *(4.)* lo que es impossible, siendo el uno parte del otro *(a. 9.)* siguese que los lados A B, A C, seran iguales, y el triangulo Isoceles *(d. 25.)* que es lo que se devia demonstrar.

COROLARIO.

De esta demonstracion se infiere, que si un triangulo fuere equiangulo, serà equilatero, porque teniendo los tres angulos iguales, tendràn sus lados opuestos iguales.

Theo-

Theorema Proposicion VII.

Si de los extremos de una linea recta, se tiran otras dos que se encuentren en un punto; de los mesmos extremos, no se podràn tirar à otro punto, otras dos rectas iguales à aquellas, cada una à la suya hazia una mesma parte.

Sea la linea A B, y el punto C, *(figura 15.)* denſe las rectas A C, B C. *(p. 1.)* digo que no ſe podran tirar otras dos iguales à ellas, cada una à la ſuya deſde los dichos extremos hazia aquella parte, que vayan à concurrir fuera del punto C; y ſi ſe dixere que es poſſible concurrir en otro punto, demonſtraremos lo contrario. Porque las dos lineas que ſe han de tirar, han de ſer iguales à A C, B C, con el intervalo de eſta, y centro B, deſcrivaſe el circulo D C E, y con el intervalo de A C, y centro A, el circulo C F G, *(p. 3.)* y ſuponiendo que el punto donde ſe quiere que concurran las lineas, ſea D, ſe tiraràn à el, las rectas B D, A D, *(p. 1.)*

Demonſtracion. Las lineas B D, B C, ſon iguales, como tambien A C, A F, *(d. 15.)* y aſſi meſmo A D, A C, *(por ſuppoſicion)* luego A F, A

A D, ſerian yguales, porque ſon yguales à la meſma A C, *(a. 1.)* pero A F, es parte de A D, y la parte ygual al todo, Implica *(a. 9.)* luego no pueden concurrir las dichas lineas en otro punto, que en C. que es lo que ſe devia demonſtrar. Si el punto cayeſſe dentro, ò fuera de las circunferencias, ſe demonſtraria lo meſmo; conque, de los extremos de una linea, no ſe pueden tirar &c.

SCHOLIO.

Eſta demonſtracion, la trahe Euclides tan confuſa, que algunos Autores la excuſan, en ſus traduciones, y yo huyendo de la prolixidad del uno, y de la omiſſion de los otros, me parecio demonſtrarla aſſi, reſpecto que ſiendo à los principios no hallo por acertado omitirla.

THEOREMA PROPOSICION VIII.

Si dos triangulos tubieren los dos lados del uno, iguales à los dos del otro, cada uno à ſu ſemejante, y el tercero, igual al tercero, los Angulos opueſtos à eſtos, ſeràn iguales.

Sean los triangulos A B C, E F D, *(fig. 16.)* que el lado E D, ſea igual à B C, y F D, à A G, y y la basa EF, à la basa AB; digo, que los Angulos formados en D, y en C, seràn iguales.

Demonstracion. Puesta la basa EF, sobre AB, convendràn, cayendo el punto E, sobre B, y el punto F, sobre A, *(a.8.)* y assi mesmo, el lado ED, caerà sobre BC, y FD, sobre AC, y el punto D, sobre C; no pudiendo caer en otra parte *(7.)* luego los Angulos en D, y en C, seràn iguales. Que es lo que se devia demonstrar.

COROLARIO.

Pues los tres lados se han ajustado cayendo uno sobre otro, y por las basas iguales, monstrados sus angulos opuestos iguales, consta que no solamente los otros dos angulos son iguales, cada uno al suyo, mas tambien el triangulo, al triangulo.

PROBLEMA PROPOSICION IX.

Dividir un Angulo Rectilineo dado, en dos igualmente.

Sea el Angulo ABC, *(fig. 17.)* cortense de BA, BC, las partes iguales BD, BE *(3.)* y tirese la recta DE, sobre laqual se descrivirà el triangulo equilatero DEF *(1.)* y dese là BF *(p. 1.)* digo, que esta dividirà el Angulo dado, en dos Angulos iguales.

De-

Demonstracion. En los triangulos B D F, B E F, los lados B D, D F, son iguales, à los lados B E, E F, cada uno al suyo *(por construcion)* y B F, comun, y assi los lados, y Angulos del un triangulo, seràn iguales, à los del otro, cada uno à su correlativo, ò semejante *(8.)* luego el angulo F B E, serà igual al Angulo F B D. Que es loque se hà propuesto hazer.

SCHOLIO.

Si el triangulo equilatero descrito sobre D E, fuesse Isoceles, se haria la mesma demonstracion, y es de notar, que un Angulo se dividirà, assi, en las partes pares que se quisiere, pero no siempre en impares; pues hasta aora nadie hallò, la triseccion del angulo.

Problema Proposicion X.

Dividir una linea recta dada, y terminada, en dos igualmente.

Sea la linea A B, *(fig. 18.)* descrivase sobre ella, el triangulo equilatero A B C, *(1.)* y por la antecedente, dividase por mitad el Angulo A C B, con la linea C D, que cortarà la A B, en D, digo, que la linea propuesta estarà dividida por mitad en el punto D.

De-

Demonstracion. En los triangulos A D C, B D C, los lados A C, B C, son iguales *(por construction)* C D, comun, y los Angulos en C se han hecho iguales; luego los dichos triangulos son iguales en todo ser *(4.)* como el lado A D, igual al de B D, y assi la linea A B, se abrà dividido por mitad, como se hà propuesto hazer.

Problema Proposicion XI.

Levantar una perpendicular sobre una linea recta, dado un punto en ella.

Sea la linea A B *(fig. 19.)* y el punto dado en ella C., cortense de A C, B C, las partes iguales C E, D C, *(3.)* y sobre E D. descrivase el equilatero E F D, *(1.)* y de se là F C, *(p. 1.)* digo que esta serà la perpendicular que se pide.

Demonstracion. En los triangulos F C D, F C E, los lados F E, C E, son iguales à los lados F D, C D, cada uno al suyo, y F C, comun: siguese, que los triangulos seràn iguales en todo ser *(c. 8.)* luego siendolo; los Angulos en C, seràn rectos, y la F C, perpendicular à A B, *(d. 10.)* que es lo que se havia de hazer.

SCHO-

SCHOLIO.

Si el punto dado fuere en un extremo de la linea, prolongandola, se harà despues, como arriba.

Problema Proposicion XII.

Bajar una perpendicular à una linea recta indeterminada, de un punto dado fuera de ella.

Sea la recta indeterminada A B, *(fig.19.)* y el punto F, tomese sobre la linea qualquier punto E, y con el intervalo F E, y centro F, descrivase el circulo D G E, *(p.3.)* y dividiendo por mitad D E *(10.)* en C, se bajarà la linea F C, digo que esta serà la perpendicular que se pide. Dense las lineas E F, D F.

Demonstracion. En los triangulos F E C, F D C, los lados F D, D C, son iguales à los lados F E, E C, cada uno al suyo y la F C, comun, de que se sigue que los triangulos seran iguales en todo ser *(8.)* y siendolo; los angulos en C, seran rectos, y là F C, perpendicular à la A B, *(d.10.)* que es lo que se devia hazer.

Theo-

THEOREMA PROPOSICION XIII.

Quando una linea recta cayere sobre otra; formarà con ella dos Angulos rectos, ò iguales à dos rectos.

Sea la recta AB, *(fig. 20.)* que cayga sobre la recta CD; digo, que harà con ella dos angulos rectos, ò iguales à dos rectos.

Demonstracion. Si la AB, cayò perpendicular à CD; harà los angulos CBA, DBA, iguales, y por consequencia rectos *(d. 10.)* mas si no fuere perpendicular como BE, formarà el angulo obtuso CBE, y el agudo EBD; que de si mesmos se demuestran ser iguales à dos rectos, porque estando provado recto el angulo CBA, como tambien ABD, y este contiene los dos angulos agudos ABE, EBD, si se juntan los tres angulos, haràn dos rectos *(a. 9.)* que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XIV.

Si dos lineas rectas se encuentran en un mesmo punto de otra recta, formando con ella dos angulos iguales à dos rectos; las dos haràn una mesma linea.

Sea la linea AB, *(fig. 20.)* y el punto en

C ella

ella B; donde se encuentran las dos rectas CB, BD, y que haga los angulos ABC, ABD, iguales à dos rectos; digo, que là CBD, es una linea recta. Y si esto no fuere assi, continuesse (*si es possible*) CB, à la parte inferior, ò superior como BE.

Demonstracion. Porque la AB, cahe sobre la CE, harà los angulos ABC, ABE, iguales à dos rectos (*13.*) y por consequencia serian iguales à los angulos ABC, ABD, que se han supuesto iguales à dos rectos, y la parte igual al todo, no puede ser (*a 9.*) luego CB, y DB, son las que hazen una linea recta.

Theorema Proposicion XV.

Si dos rectas se cortaren, los angulos opuestos que formaren en el vertice seràn iguales.

Sean las rectas AB, CD (*fig. 21.*) y que se corten en E. digo, que los angulos opuestos formados de estas lineas seràn iguales.

Demonstracion. Porque là CE, cayò sobre là AB, los angulos AEC, BEC, seràn iguales à dos rectos (*13.*) y por la mesma, cayendo BE, sobre là CD, los angulos CEB; DEB, seràn tambien iguales à dos rectos; pues quitese el comun CEB, y quedaràn iguales

les los angulos opueſtos AEC, BED *(a.3.)* y de la meſma manera ſe demonſtrarà ſer el angulo AED, igual de CEB, que es lo que ſe devia demonſtrar.

COROLARIO.

Conſta de eſta demonſtracion, que ſi dos lineas rectas ſe cortaren, haràn en el punto de ſu ſexion, quatro angulos iguales à quatro rectos; como tambien todos los angulos rectilineos que ſe formaren en un meſmo punto, ſeràn iguales à quatro rectos.

THEOREMA PROPOSICION XVI.

Si en un triangulo ſe prolonga uno de ſus lados, el Angulo exterior ſerà mayor, que qualquiera de los interiores opueſtos.

Sea el triangulo ABC, *(fig. 22.)* y el lado prolongado B C, digo, que el angulo exterior ACD, es maior que qualquiera de los interiores opueſtos en B, ò en A, dividaſe AC, en dos igualmente en E, *(10.)* deſe la recta B F, y haga ſe EF, igual à BE, *(3.)* y tireſe la CF.

Demonſtracion. En los triangulos ABE, FEC, los lados AE, BE, ſon iguales à EC, EF, cada uno al ſuyo *(por conſtrucion)* y los angulos opueſtos en E, ſon iguales (15.) de que ſe ſigue que los triangulos B A E, F C E, ſon iguales (4.) y el angulo en A, igual al angulo E C F: y porque eſte ultimo es parte del angulo exterior A C D; ſu igual B A C, lo ſerà tambien (*a.* 7.) y ſiendo el todo mayor que ſu parte (*a.* 9.) ſe ſigue que el angulo externo A C D, ſerà mayor que el interno opueſto B A C.

De la meſma manera ſe demonſtrarà, prolongando el lado A C, y executando lo demas.

COROLARIO.

De eſta Propoſicion ſe infiere (dize Proclus, y lo refiere Henrion) que de un meſmo punto, no ſe pueden tirar à una linea recta, mas que otras dos iguales entre ſi, quiero decir que las dos lineas ſean iguales la una à la otra, y que entonces no ſe podràn tirar otras dos.

THEOREMA PROPOSICION XVII.

Dos angulos de un triangulo de qualquier manera que ſe tomen, ſon menores que dos rectos.

Sea el triangulo A B C, (*fig.* 23.) digo, que dos

dos de ſus angulos juntos, ſeràn menores que dos rectos de qualquier manera que ſe tomen; Prolonguеſe el lado B C.

Demonſtracion. El angulo interior en B, es menor, que el exterior A C D (*16.*) añadaſe à eſtos dos, el angulo A C B, y los angulos en B, y A C B, ſeràn menores que los angulos A C B, A C D (*a. 4.*) los quales ſon iguales à dos rectos (*13.*) luego los angulos en B, y A C B, ſon menores que dos rectos. Y lo meſmo ſe demonſtrarà de los otros angulos; que es lo que ſe devia demonſtrar.

COROLARIO.

Por eſta demonſtracion es manifieſto, que de un meſmo punto, no ſe puede tirar à una linea recta, mas de una perpendicular.

THEOREMA. PROPOSICION XVIII.

En todo Triangulo, el mayor lado ſuſtienne el mayor Angulo.

Sea el triangulo A B C, (*fig. 23.*) que el lado A B; ſea mayor que A C; digo, que ſu angulo opueſto A C B, ſerà mayor que el angulo en B; hagaſe A E, igual à A C, (*3.*) y tireſe C E.

Demonstracion. El triangulo A C E, siendo isoceles *(por construcion)* tendrà sus angulos en E, y en C, iguales *(5.)* pero el angulo E B C, interno, es menor que su externo A E C, *(16.)* tambien serà menor que el angulo A C E, su igual; luego, el total A C B, siendo mayor que su parte A C E *(a. 9.)* vendrà à ser el dicho total, à un mucho mayor, que el angulo en B, opuesto al menor lado A C; de que se infiere que el mayor lado A B, sustiene el mayor angulo, que es lo que convenia demonstrar.

Theorema. Proposicion XIX.

En todo Triangulo, el mayor angulo està opuesto al mayor lado.

La evidencia desta Proposicion consta de la antecedente, porque demonstrado, que el mayor lado està opuesto al mayor angulo; siguese que el mayor angulo estarà opuesto al mayor lado; no pidiendo esto otra demonstracion, y assi escusarè la que trahe Euclides.

Theorema. Proposicion XX.

En todo Triangulo, dos de sus Lados, de qualquier modo que se tomen, son mayores que el tercero.

Sea el triangulo E B C, *(fig. 23.)* digo que los

los dos lados B E, E G, juntos, son mayores que B C; y si se dixere no ser assi; prolonguese B E, de suerte que E A, sea igual de C E, y de se là C A.

Demonstracion. Los lados A E, E C, son iguales, *(por construcion)* y assi el angulo A C E, y el angulo en A, lo seràn tambien *(5.)* pero el angulo total A C B, es mayor que su parte A C E, *(a. 9.)* y por la mesma serà mayor, que su igual en A, luego el lado B A, igual à los dos B E, E C; opuesto al mayor angulo, serà mayor que el lado B C, opuesto al menor *(19.)* que es lo que se devia demonstrar.

Theorema. Proposicion XXI.

Si de los extremos de un lado de un triangulo, se tiraren dos rectas que se encuentren dentro de el; estas seràn menores que las otras dos, mas formaràn mayor angulo.

Sea el triangulo A B C (*fig. 23.*) que de los extremos B, y C, se han tirado las rectas B F, C F, digo que estas juntas seràn menores que las dos juntas A B, A C, mas el angulo B F C, serà mayor, que el angulo en A.

Demonstracion. En el triangulo A E C, los lados

lados C A, A E, juntos, ſon mayores que C E, (*20*) y añadiendo à una y otra parte la B E, ſe tendràn mayores C A, A B, que C E, E B, (*a. 4.*) y en el triangulo B F E, los lados F E, E B, juntos, ſon mayores que B F, (*20*) y añadiendo la comun C F, los lados B E, E C, ſeràn mayores que B F, F C, (*a. 4.*) y haviendo ya demonſtrado ſer mayores A B, A C, que los dos C E, E B, ſe ſigue que mucho mas lo ſeràn de B F, F C.

En ſegundo caſo, digo que el angulo C F B, es mayor, que el angulo en A. Porque el angulo C E B, ſiendo exterior al triangulo C A E; ſerà mayor, que el interior opueſto en A, (*16.*) y por la meſma el angulo C F B, ſerà mayor que el angulo C E B. De que ſe ſigue que aun ſerà mayor que el angulo en A, que es lo que ſe devia demonſtrar.

Problema Proposicion XXII.

Formar un triangulo de tres lineas rectas iguales à otras tres dadas; con tal que dos de ellas juntas, de qualquiera manera que ſe tomen, ſean mayores que la tercera.

Sean las tres rectas A, B, y C, (*fig. 24.*) tireſe una recta à diſcrecion; y ſobre ella ſe harà

la

la E F, igual à A, ò à otra qualquiera, (3.) y con el intervalo de B, y centro E, se descrivirà el arco H G I; y con el intervalo de C, y centro F; el arco L G K, que corte el primero en G; dense las rectas E G, F G; digo que el triangulo E G F, tiene sus tres lados iguales à las tres rectas dadas.

Demonstracion. El lado E F, se ha hecho igual à la A, y el arco H G I, se descriviò con el intervalo de B; luego E G, serà igual à la B, (*d.* 15.) y por la mesma F G, serà igual de C. Con que diremos haver formado un triangulo, cuyos lados son iguales à las tres rectas dadas.

Problema Proposicion XXIII.

Hazer un angulo rectilineo igual à otro dado, en un punto de una linea recta.

Sea el angulo rectilineo dado A B C, y el punto en la recta dada E, (*fig.* 25.) de qualquier punto de A B, y B C; se tirarà una recta como A C, y se harà E D, igual à A B, (3.) y sobre la E D, el triangulo D E F, (22.) de suerte que E F, sea igual de B C, y D F, de A C; digo que el angulo en E, serà igual al dado B.

Demonstracion. Los triangulos A B C,

D

D E F, tienen todos ſus lados iguales cada uno al ſuyo *(por conſtrucion)* de que ſe ſigue que los triangulos ſeràn iguales en todo ſer *(ç. 8.)* y aſſi el angulo en E, ſerà igual à ſu ſemejante dado en B, que es lo que ſe devia hazer.

Theorema Proposicion XXIV.

Si dos triangulos tubieren los dos lados del uno, iguales à los dos del otro; cada uno à ſu ſemejante; el que tubiere mayor angulo comprehendido en los lados iguales, tendrà el lado opueſto à eſte angulo mayor.

Sean en la (*fig. 1. Eſtampa 2.*) los dos lados A B, A C, del triangulo A B C, iguales à los D E, E F, del triangulo D E F, cada uno al ſuyo; y que el angulo en E, ſea mayor que el de en A, digo que la baſa D F, ſerà mayor que la B C: y ſi eſto no fuere aſſi, ſerà igual, ò menor.

Demonſtracion. Si la baſa B C, fuere igual de D F, haviendo ſupueſto los otros dos lados de un triangulo iguales à los dos del otro, cada uno al ſuyo; los dos triangulos ſerian iguales en todo ſer (*8.*) y aſſi el angulo en A, lo ſeria del angulo en E; y eſte ſe ha ſupueſto mayor; pues igual y mayor, no puede ſer.

Se-

En ſegundo caſo, ſi ſe dijere que la DF, es menor que BC; entonces el angulo en E, ſeria menor que el de en A *(19.)* ha ſe ſupueſto mayor; luego no puede ſer menor, ſiguеſe que la baſa DF, es mayor que BC. Que es lo que ſe devia demonſtar.

THEOREMA PROPOSICION XXV.

Si dos triangulos tienen los dos lados del uno iguales à los dos del otro cada uno al ſuyo, el que tubiere el tercero mayor, tendrà el angulo opueſto à el, mayor.

Sean los dos triangulos ABC, DEF *(fig.1.)* que tengan los lados AB, AC, DE, EF, iguales cada uno al ſuyo, y la baſa DF, mayor que la BC; digo que el angulo en E, ſerà mayor que el en A.

Demonſtracion. Si no fuere aſſi, el angulo en A, ſerà igual al de en E; ò mayor; ſi igual, tambien lo ſeràn las baſas BC, DF *(4.)* y ſi mayor, la baſa DF, ſerà menor que la BC *(19.)* y uno y otro es contra el ſupueſto; luego el angulo en E, es mayor que el angulo en A, que es lo que ſe quisò demonſtrar.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION XXVI.

Si dos triangulos tubieren los dos angulos del uno, iguales à los dos del otro, y un lado à un lado, cada cosa à su semejante; el tercer angulo y los de mas lados seràn iguales entre si.

Sean los triangulos A B C, E F D *(fig. 2.)* que los angulos en C, y A, sean iguales à los angulos en D, y F E D, cada uno à su semejante, y el lado A C, igual à E D; digo que los angulos en B, y en F, seràn iguales, como los otros dos lados, à los otros dos cada uno al suyo: y si no fuere assi, y se dijese que el lado D F, es mayor ò menor, por exemplo mayor que B C; igual à este, cortese D H *(3.)* y tirese E H.

Demonstracion. Los triangulos E H D, A B C, tienen los lados H D, B C, E D, A C, iguales *(por suposicion y construcion)* y los angulos en C, y en D, se han supuesto iguales; luego los dos triangulos lo seràn en todo ser *(4.)* y assi el angulo H E D, lo serà del angulo F E D; siguese que este seria igual à su parte H E D; lo que no puede ser, siendo el uno parte del otro *(a. 9.)*, y assi el lado

F D,

F D, no es mayor que B C, ni menor; porque ſe haria la meſma demonſtracion ſobre el lado B C; ni tampoco F E, ſerà mayor ni menor que A B, por que ſeguiria la demonſtracion ſobre ſus lados; de que ſe infiere que los triangulos ſon iguales en todo ſer.

En ſegundo caſo. Proponiendo que los angulos en D y F, ſean iguales à los de en C, y B, cada uno al ſuyo, y el lado E D, de A C; digo que F D, ſerà igual de B C, y ſi fuere mayor corteſe como antes H D, igual à B C, y ſe tendràn los triangulos E H D, A B C, iguales *(por lo demonſtrado)* y el angulo en B, igual à E H D; y eſte por externo es mayor que ſu interno opueſto E F D *(16.)* el qual ſe hà ſupueſto igual de B, luego no puede ſer menor; ni por conſequencia el lado F D, mayor que B C, (mas ſi iguales los lados F D, E D, de B C, A C) y teniendo los angulos comprehendidos en C, y D, iguales, lo ſeràn en todo ſer los triangulos *(4.)* los lados à los lados, y los angulos à los angulos cada uno à ſu ſemejante. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION XXVII.

Si una linea recta cayendo ſobre otras dos rectas; hiziere los angulos alternos iguales, eſtas dos ſeràn paralelas.

Sean las dos rectas A B, C D *(fig. 3.)* ſobre las quales cahe la H Y, cortandolas en E, y F; y haziendo los angulos alternos B E F, E F C, iguales, digo que las rectas A B, C D, ſeràn paralelas, y ſi no lo fueren prolongadas concurriràn en alguna parte, y ſea en G.

Demonſtracion. En el triangulo F G E, el angulo exterior C F E, ſerà mayor que ſu interior opueſto F E G, *(16.)* lo que es contra el ſupueſto, de que ſe ſigue que las rectas A B, C D, no concurriràn jamas, y ſeràn paralelas entre ellas *(d. 35.)* que es lo que convino demonſtrar.

THEO-

Theorema Proposicion XXVIII.

Si una linea recta cayendo ſobre otras dos rectas, hiziere el Angulo exterior igual à ſu interior opueſto del meſmo lado, ò bien los dos interiores de un meſmo lado iguales à dos rectos; eſtas dos rectas ſeràn paralelas entre ellas.

Sean las dos rectas AB, CD, *(fig. 3.)* ſobre las quales cae la HY, haziendo el angulo exterior HEB, igual à ſu interior opueſto EFD; digo, que las dos rectas AB, CD, ſon paralelas.

Demonſtracion, El angulo AEF, ſiendo igual de HEB, *(15.)* lo ſerà tambien de ſu igual EFD, *(a. 1.)* ſigueſe que las rectas AB, CD, ſon paralelas, por la antecedente.

Supongaſe en ſegundo caſo, que los angulos interiores de un meſmo lado BEF, EFD, ſon iguales à dos rectos, digo que las lineas AB, CD, ſeràn paralelas.

Demonſtracion. Los dos angulos EFC, EFD, ſon iguales à dos rectos *(13)* y en ſupoſicion lo ſon tambien los angulos BEF, EFD; luego quitando el angulo comun EFD; reſtaràn los angulos alternos BEF, EFC, igua-

iguales *(a.3.)* ſiguefe que las dos rectas A B, C D, ſon paralelas *(27.)* que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XXIX.

Si una linea recta cayere ſobre otras dos rectas y paralelas; harà los Angulos alternos iguales: el externo igual à ſu interno opueſto del meſmo lado; y los dos internos de un meſmo lado iguales à dos rectos.

Sean las rectas A B, C D, paralelas *(fig. 3.)* y que caiga ſobre ellas la H Y, digo en primer caſo, que los angulos alternos B E F, E F C, ſon iguales; y de nò ſerlo, alguno ſerà menor, y ſea lo B E F.

Demonſtracion. Porque los angulos B E F, E F C, ſe quiere que ſean deſiguales, añadaſe à cada uno el angulo E F D; y que daràn uno y otro deſiguales *(a.4.)* pero los dos angulos C F E, E F D, ſon iguales à dos rectos *(13.)* luego los angulos B E F, E F D, ſeràn menores que dos rectos; y en tal caſo las lineas A B, C D, nò ſeràn paralelas *(a. 11.)* lo que es contra el ſupueſto, y aſſi el angulo B E F.

BEF, no es menor, como se queria, que el angulo EFC; mas si igual.

En segundo caso, el angulo exterior HEA, es igual à su interior opuesto del mesmo lado EFC.

Demonstracion. El angulo HEA, es igual à su opuesto BEF *(15.)* el qual se ha dicho serlo de EFC; y assi este lo serà del dicho HEA *(a. 1.)*

En tercer caso; digo, que los angulos BEF, EFD, internos de una mesma parte, son iguales à dos rectos.

Y de no ser assi, las lineas AB, CD, no serian paralelas *(a. 11.)* lo que es contra el supuesto; y lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XXX.

Las lineas rectas paralelas à una mesma, son paralelas entre si.

Sean en la *(fig. 4.)* las rectas AB, CD, paralelas à la recta EF; digo, que AB, CD, seràn paralelas entre ellas. Tirese la recta GHK, que corte las propuestas en dichos puntos.

Demonstracion. Porque AB, es paralela à EF; los angulos alternos BGH, GHE, seferán iguales *(29.)* y por la mesma razon, el angulo exterior GHE, es igual al interior opuesto del mesmo lado HKC *(por la dicha)* luego este será igual de BGH *(a. 1.)* y assi las lineas AB, CD, son paralelas entre si *(27.)* que es lo que se devia demonstrar.

Problema Proposicion XXXI.

Dada una linea recta y un punto fuera de ella; tirar una paralela à la linea, que passe por el punto dado.

Sea dada la linea CD, y el punto E *(fig. 3.)* elijase sobre la dada un punto, como F; y dese à el, la recta EF, que formarà qualquier angulo EFC; igual à el, en el punto E, hagase el angulo BEF *(23.)* y dese la recta AB, que será la paralela que se pide.

Demonstracion. Los angulos alternos EFC, FEB, son iguales *(por construcion)* luego *(por la 27.)* la linea AB, será paralela à CD. que es lo que se devia hazer.

Theo-

THEOREMA PROPOSICION XXXII.

En todo triangulo, ſiendo prolongado uno de ſus lados; el angulo exterior es igual à los dos interiores opueſtos: y los tres angulos de un triangulo, ſon iguales à dos rectos.

Sea el triangulo ABC (*fig. 5.*) y continuado el lado AC, haſta D; digo, que el angulo exterior BCD, es igual à los dos interiores opueſtos en A, y en B; tireſe CE, paralela à AB (*31.*)

Demonſtracion. Por quanto la recta BC, corta las dos AB, CE; los angulos alternos ABC, BCE, ſeràn iguales, como tambien el exterior ECD, à ſu interior opueſto del meſmo lado BAC (*29.*) luego el angulo exterior BCD, es igual à los dichos interiores opueſtos.

En ſegundo caſo digo, que los tres angulos del triangulo, ſon iguales à dos rectos.

Demonſtracion. El angulo exterior BCD, ſe ha demonſtrado igual à los dos interiores en A, y en B; y juntando à una y otra parte el interno en C, los dos angulos BCD, BCA, ſeràn iguales à dos rectos (*13.*) ſigueſe que los tres an-

angulos del triangulo, son tambien iguales à dos rectos (*a. 2.*) que es lo que se devia demonstrar.

COROLARIO I.

De esta Proposicion se infiere que los tres angulos juntos de un triangulo, son iguales à los tres de otro juntos: y si los dos angulos de un triangulo, son iguales à los dos de otro; el tercer angulo, serà igual al tercero: y si los dos angulos de un triangulo, fueren iguales à los dos de otro, cada uno al suyo; el tercer angulo serà igual al tercero; y los triangulos equiangulos.

COROLARIO II.

Tambien se infiere, que si en un triangulo Isoceles, el angulo comprehendido de los lados iguales, fuere recto; que cada uno de los otros dos, serà medio recto.

COROLARIO. III.

Siguese de la mesma, que cada angulo de un triangulo equilatero, es los dos tercios de un recto, ò de la tercia parte de dos rectos.

CO-

COROLARIO IV.

Tambien (como dice el Padre Millet De Chales) de un punto dado fuera de una linea, no ſe podrà dar à ella mas de una perpendicular; porque de otra manera un triangulo tubiera dos de ſus angulos rectos. Lo que implica ſegun lo demonſtrado.

THEOREMA PROPOSICION XXXIII.

Las lineas rectas que unen dos rectas paralelas y iguales, de una meſma parte; ſon tambien paralelas y iguales.

Sean las dos rectas A B, C D (*fig. 6.*) que unen à las dos A C, B D, iguales y paralelas; digo, que A B, y C D, ſeràn tambien paralelas y iguales, deſe la diagonal A D.

Demonſtracion. Porque la recta A D, cae ſobre las dos paralelas A C, B D; harà los angulos alternos C A D, A D B, iguales (*29.*) y ſiendo A C, B D, iguales (*por ſupoſicion*) los triangulos A C D, D B A, tendràn dos lados iguales à dos, cada uno al ſuyo, y los angulos comprehendidos deſtos lados ſiendo iguales, los triangulos lo ſeràn en todo ſer (*4.*) y el angulo B A D, igual à ſu alterno

ADC; y (*por la 27.*) las iguales AB, CD, seràn paralelas: que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XXXIV.

En todo Paralelogramo, los lados y angulos opuestos, son iguales entre ellos; y la diagonal le divide en dos partes iguales.

Sea el Paralelogramo AD (*fig. 6.*) y tirada en el, la diagonal AD; digo, que los lados y angulos opuestos son iguales, y que el Paralelogramo està dividido en dos igualmente por la diagonal AD.

Demonstracion. Por quanto el quadrilatero AD, es un Paralelogramo, el lado AC, serà paralelo à BD, y AB, à CD; y el angulo BAD, serà igual à su alterno ADC, como tambien los angulos alternos ADB, DAC (*29.*) con que el triangulo ACD, tendrà los angulos ADC, DAC; iguales à los dos DAB, BDA, del triangulo ABD; y el lado AD, comun, siguese que los dos triangulos son iguales en todo ser (*26.*) y cada lado à su correspondiente; de que se infiere, que la diagonal divide el paralelogramo en dos igualmente; que es lo que se devia demonstrar.

THEO-

Theorema Proposicion XXXV.

Los Paralelogramos ſon iguales, quando eſtando terminados entre unas meſmas paralelas; tienen ſobre una de ellas una meſma baſa.

Sean los dos Paralelogramos A C, B F *(fig. 7.)* que eſtèn entre las meſmas paralelas A F, B C; y que tengan la meſma baſa en una de ellas como B C; digo que ſeràn iguales entre ſi.

Demonſtracion. Los lados opueſtos A D, B C, ſon iguales *(34)* como tambien E F, B C; ſigueſe que lo ſeràn tambien A D, E F *(a. 1.)* y que añadiendoles la comun D E; la A E, y D F, ſeràn iguales *(a. 2.)* pero los lados A B, D C, ſon iguales y paralelos *(34.)* con que el angulo exterior F D C, es igual à ſu interior opueſto del meſmo lado E A B *(29.)* y aſſi los triangulos F D C, E A B, teniendo dos lados iguales à dos, cada uno al ſuyo, y el angulo comprehendido; ſeràn iguales *(4.)* de quienes quitando el triangulo comun E D G; reſtaràn iguales los quadrilateros D A B G, F E G C *(a. 3.)* à los quales añadiendo el triangulo comun G B C; quedaràn los Paralelogramos A C, B F, iguales (*a. 2.*) que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XXXVI.

Los Paralelogramos ſon iguales, quando eſtando terminados entre unas meſmas paralelas; tienen ſobre una de ellas, iguales baſas.

Sean los Paralelogramos A C, E I (*fig. 8.*) que tengan las baſas B C, H I, iguales, y que eſten entre las meſmas paralelas A F, B I; digo, que eſtos Paralelogramos ſeràn iguales: denſe las rectas E B, y F C.

Demonſtracion. Por quanto las baſas B C, H I, ſe han ſupueſto iguales; E F, H I, lo ſeràn tambien (*34.*) de que ſe ſigue que E F, B C, ſeràn iguales (*a. 1.*) y aſſi meſmo lo ſeràn C F, B E, (*33.*) y el quadrilatero E B C F, un Paralelogramo (*d. 36.*) igual al Paralelogramo A C; por eſtar entre las meſmas paralelas A F, B I, y tener la meſma baſa B C (*35.*) y por la meſma razon ſon iguales los Paralelogramos B F, E I; de que ſe ſigue que lo ſeràn tambien A C, E I (*a. 1.*) que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theo-

Theorema Proposicion XXXVII.

Los triangulos ſon iguales, quando eſtando terminados entre unas meſmas paralelas; tienen commun baſa en una de ellas.

Sean los triangulos A B C, D B C *(fig. 9.)* que tengan la meſma baſa B C, y eſten entre las meſmas paralelas A F, B C; digo, que los triangulos ſeràn iguales: deſe la E C, paralela à A B, y C F, à B D *(31.)*

Demonſtracion. Los quadrilateros A C, B F, ſon paralelogramos *(d. 36.)* y iguales *(35.)* y los triangulos A B C, D B C, ſon ſus mitades *(34.)* ſigueſe que eſtos triangulos, ſeràn tambien iguales *(a. 7.)* Que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema. Proposicion XXXVIII.

Los triangulos ſon iguales, quando eſtando conſtituidos entre unas meſmas paralelas; tienen ſobre una de ellas, iguales baſas.

Sean los triangulos A B C, D E F, *(fig. 10)* que tengan las baſas B C, E F, iguales, y eſten entre las meſmas paralelas A H, B F; digo

digo, que los triangulos, seràn iguales: dese la CG, paralela à AB, y FH, à DE, *(31.)*

Demonstracion. Los paralelogramos AC, DF, son iguales *(36.)* luego los triangulos ABC, DEF, que son sus mitades *(34.)* lo seràn tambien *(4.7.)* Que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XXXIX.

Los triangulos iguales, que estàn sobre basa comun, y constituidos azia una mesma parte; estàn entre unas mesmas paralelas.

Sean los triangulos iguales ABC, DBC, *(fig. 11.)* constituidos sobre la mesma basa BC, y à una mesma parte; digo, que AD, tirada por los vertices, serà paralela à BC; y de no querrer que esto sea assi; del punto A, se podrà tirar otra linea paralela à BC *(31.)* esta caerà mas abaxo de AD, ò mas arriba: y siendo de una ò de otra manera, como AE, que passe por arriba; se continuarà BD, hasta cortar AE, en E; dese la CE, y si por abaxo, como AF, dese la CF.

Demonstracion. Si se quiere que cayga mas arriba los triangulos ABC, EBC, que tienen

nen la mesma basa BC, y estàn entre unas mesmas paralelas seràn iguales *(37)* y por el supuesto, lo son los triangulos ABC, DBC; siguese que lo seràn tambien los dos DBC, EBC *(a.1.)* pero el uno es parte del otro; con que no puede ser *(a.9.)* y assi la paralela no caerà mas arriba como se queria: Tampoco caerà mas abaxo, porque sucederà el mesmo inconveniente, respecto que los triangulos ABC, FBC, serian iguales *(37.)* como tambien DBC, FBC *(a.1.)* y este es parte del otro; luego implica *(a. 9.)* de que se infiere que solo la AD, tirada por los vertices, es la verdadera paralela à la basa: que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XL.

Los triangulos iguales, constituidos azia una mesma parte; y de iguales basas, tomadas sobre una mesma recta; estàn entre unas mesmas paralelas.

Sean los triangulos ABC, DEF *(fig. 12.)* iguales, y constituidos sobre iguales basas BC, EF, y azia una mesma parte; digo, que estaràn entre unas mesmas paralelas; quiero dezir que la recta AD, tirada por los vertices, serà pa-

paralela à BF. Y si esto se negasse; del punto A, se podria tirar otra paralela à la BF; que caerà mas abaxo, ò mas arriba de ella: primeramente si mas arriba, como AG; continuesse ED, hasta G, y dese la GF.

Demonstracion. Los triangulos ABC, EGF, que en suposicion estàn entre dos paralelas, y tienen basas iguales, lo son ellos entresi *(38)* siguese que lo seràn tambien EDF, EGF, pues que son iguales al mesmo ABC *(a. 1.)* lo que no puede ser, siendo el uno parte del otro *(a. 9.)* con que la paralela tirada del vertice A, no cae mas arriba de AD, ni mas abaxo, como AH: y si se dixese que si; dese la FH, y en tal caso, los triangulos ABC, HEF, que tienen las basas iguales BC, EF, y estàn entre unas mesmas paralelas, serian iguales *(38.)* y haviendose los triangulos ABC, DEF, supuesto iguales; lo serian tambien los triangulos DEF, HEF *(a. 1.)* y el uno es parte del otro; luego no puede ser *(a. 9.)* de que se infiere que la paralela à BF, tirada del vertice A, passarà por el de D, que es lo que se devia demonstrar.

THEO-

Theorema Proposicion XLI.

Si un paralelogramo y un triangulo, tienen una mesma basa, y estàn entre unas mesmas paralelas; el paralegramo serà duplo del triangulo.

Sea el paralelogramo A C, y el triangulo E B C (*fig. 13.*) que tengan la basa comun B C, y que esten entre las mesinas paralelas A E, B C; digo, que el paralelogramo serà duplo del triangulo: dese la diagonal A C.

Demonstracion. El triangulo A B C, es mitad del paralelogramo A C (*34.*) y el triangulo A B C, es igual al triangulo E B C (*37.*) luego el paralelogramo que es duplo del uno, serà tambien duplo del otro (*a. 6.*) que es lo que se quiso demonstrar.

Aunque la basa no sea comun, como el triangulo y el paralelogramo las tengan iguales, se demonstrarà lo mesmo; construiendo el triangulo sobre el paralelogramo, segun la (*dicha figura*)

Pro-

PROBLEMA PROPOSICION XLII.

Hazer un paralelogramo igual à un triangulo rectilineo dado, y que tenga un angulo igual à otro angulo rectilineo dado.

Sea el triangulo BAC, y el angulo D (*fig.* 14.) dividase uno de los lados del triangulo, como AC, en dos igualmente en E (*10.*) y hagase el angulo GEC, igual al dado D (*23.*) tirese de B, la BF, paralela à AC; y la CF, à EG (*31.*) hasta encontrarse en F; digo, que el paralelogramo EF, es el que se pide: desse la BE.

Demonstracion. Los triangulos BAE, BEC, son iguales (*38.*) y assi el triangulo total BAC, serà duplo de BEC, y tambien es duplo de este, el paralelogramo EF (*41.*) luego dicho paralelogramo serà igual al triangulo BAC (*a.6.*) y siendo por construcion el angulo GEC, igual al dado D; havremos construido el paralelogramo EF: que es el que se pide.

COROLARIO.

Destas dos ultimas Proposiciones, nos es evidente, que si un triangulo tuviere la basa du-

dupla de un paralelogramo, eſtando entre unas meſmas paralelas, conſtituidos azia à una meſma parte, y con las baſas en una de las paralelas: que el triangulo ſerà igual al paralelogramo.

THEOREMA PROPOSICION XLIII.

En todo paralelogramo, los cumplimientos de aquellos paralelogramos por donde paſſa el diametro, ſon iguales.

Sea el paralelogramo B D, y ſu diametro A C (*fig. 15.*) al rededor del qual eſtàn los paralelogramos A F, C F; digo, que los paralelogramos I H, G E, que ſon ſus cumplimientos, ſon iguales.

Demonſtracion. Los triangulos totales A B C, y A D C, ſon iguales (*34.*) y por la miſma lo es el triangulo F G C, de F I C, y A H F, de A E F, que quitados unos y otros, de los totales, quedaràn los cumplimientos E G, H I, iguales (*a. 3.*) que es lo que ſe devia demonſtrar.

PRO-

Problema Proposicion XLIV.

Dado un triangulo rectilineo, y una linea recta; describir sobre ella, un paralelogramo igual al triangulo; y que tenga un angulo igual à otro angulo rectilineo dado.

Sea la linea dada A B, el triangulo C, y el angulo D (*fig. 16.*) prolonguese A B, hasta E; de suerte que A E, sea igual à uno de los lados del triangulo C (*2*) y acavese el triangulo A F E, que cada uno de sus lados, sea igual à los de C (*22.*) y assi los triangulos, seràn iguales (*8.*) hagase el paralelogramo A F, igual al triangulo A F E, que tenga un angulo, como G A H, igual al dado D (*42.*) y continuese F H, de suerte que H I, sea igual à A B (*2.*) y haviendo prolongado la F G, se tirarà por A, la I K; y de este punto, sea tirada K M, paralela à G B (*31.*) hasta encontrarse con I B, prolongada, lo que haze en M; y finalmente, sea prolongada H A, hasta encontrar la K M, en L; digo, que el paralelogramo A M, es el que se pide.

Demonstracion. El Paralelogramo A F, se ha hecho igual al triangulo A F E, y assi mesmo di-

dicho paralelogramo, es igual de A M *(43.)* luego eſte lo ſerà tambien del dicho triangulo, ò del dado C *(a. 1.)* con que havremos deſcrito ſobre la linea dada A B, un paralelogramo igual al triangulo dado C: y porque el angulo B A L, es igual de G A H *(15.)* y eſte, por conſtrucion, lo es del dado D; ſigueſe que B A L, ſerà igual al meſmo dado D *(a. 1.)* y aſſi havremos hecho el paralelogramo A M, con las circunſtancias pedidas.

Problema Proposicion XLV.

Hazer un paralelogramo igual à una figura rectilinea dada, y que tenga un angulo igual à un angulo rectilineo dado.

Sea la figura dada A B C D *(fig. 17.)* y igual à ella ſe quiere hazer un paralelogramo, que tenga un angulo igual al angulo E; dividaſe el rectilineo, en triangulos; tirando la A C; y hagaſe el paralelogramo G I, igual al triangulo A D C, que tenga el angulo G F I, igual al dado E *(42.)* y deſpues *(por la 44.)* el paralelogramo H K, igual al triangulo A B C; que tenga el angulo H I K, igual al dado E, y el lado H I, igual al del otro paralelogramo F G; digo, que el paralelogramo total F L, es el que ſe pide.

Demonſtracion. Los dos paralelogramos F H, IL, se han hecho iguales al rectilineo dado, y cada uno tiene un angulo, igual à E, y por quanto la linea HI, del paralelogramo IL, se ha hecho igual à FG, del paralelogramo FH; y los angulos GFI, HIK, son cada uno igual al dado E (*por construcion*) lo seràn todos entre si (*a.1.*) à los quales, si se les añade el comun FIH; los dos GFI, HIF, que son iguales à dos rectos (*29.*) siendo FH, paralelogrammo; seràn iguales à los dos HIK, HIF, (*a. 2.*) y FK, una linea recta (*14.*) como assi mesmo GL, que le es su igual y paralela (*33.*) luego GK, serà un paralelogramo (*d. 36.*) igual al rectilineo dado, que tiene el angulo en F, igual al dado E; como se ha propuesto.

Problema Proposicion XLVI.

Sobre una recta terminada, descrivir un quadrado.

Sea la recta dada AB (*fig. 18.*) sobre laqual sequiere descrivir un quadrado: de sus extremos, levantense las perpendiculares AC, BD (*11.*) iguales cada una à la recta dada (*2.*) y dese la CD; digo, que el quadrilatero AD, es un quadrado.

Demonstracion. En el quadrilatero AD, qual-

qualquiera de los lados A C, B D, se ha hecho igual de A B; como los angulos en A, y en B, rectos, y assi los dichos lados, seràn paralelos (*28.*) y el quadrilatero, un paralelogramo (*33.*) y por consequencia C D, igual y paralela de A B, con que los angulos en C, y D, seràn rectos, por iguales à sus opuestos (*34.*) y la figura, un quadrado (*d. 30*) que es lo que se devia hazer.

THEOREMA PROPOSICION XLVII.

En todo triangulo rectangulo, el quadrado del lado opuesto al angulo recto; es igual à los quadrados de los otros dos lados juntos.

Sea el triangulo A B C (*fig. 19.*) que su angulo en B, sea recto; digo, que el quadrado de A C, opuesto à el, es igual à los quadrados juntos de A B, B C: descrivase sobre cada lado del triangulo, un quadrado (*46.*) del punto B, tirese B D, paralela à A E (*31.*) y dense las rectas B E, B F, A G, y H C.

Demonstracion. Los angulos formados en B, de los quadrados H B, G B, son rectos (*por construcion*, y assi mesmo es recto (por el supuesto) el angulo A B C; de suerte que A K,

 serà

ferà una linea recta *(14)* y por la mefma, lo ferà C I; los angulos B A H, C A E, fon rectos *(por conftrucion)* figuefe que feràn iguales *(a. 10.)* y añadiendoles el angulo B A C, los compueftos H A C, B A E, feràn iguales *(a. 2.)* en los triangulos H A C, B A E; los lados A C, A H; fon iguales à los lados A B, A E; cada uno al fuyo, y fus angulos en A, provados iguales; de que fe infiere que lo feràn los triangulos *(4.)* pero el quadrado A I, es duplo del triangulo H A C, teniendo los dos, la bafa comun A H; y eftando entre las mefmas paralelas A H, I C *(41.)* y por confequencia duplo del triangulo B A E; de el qual por la mefma razon, ferà duplo, el paralelogramo A D, y affi efte ferà igual al quadrado A I *(a. 6.)* y con las mefmas circunftancias que hafta aqui; provaremos que el quadrado C K, es igual al paralelogramo C D: y fiendo el quadrado C E, igual à fus partes, que fon los dichos paralelogramos *(a. 9.)* y eftos, iguales à los quadrados A I, C K, que fon los de los lados, que forman el angulo recto; feràn tambien eftos iguales al quadrado C E *(a. 1.)* que es lo que fe devia demonftrar.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION XLVIII.

Si el quadrado de un lado de un triangulo, es igual, à los quadrados de los otros dos lados; el angulo opuesto à aquel lado, serà recto.

Sea en el triangulo A B C (*fig. 20.*) donde el quadrado del lado B C, sea igual à los dos quadrados de los otros dos lados BA, A C, digo, que el angulo B A C, serà recto: levantese A D, perpendicular à A C (*11*) y igual à A B (*2.*) tirese C D.

Demonstracion. El quadrado de B C, se ha supuesto igual à los quadrados de B A, A C; pero A D, se ha hecho igual de A B; y la A C, es comun à los dos triangulos; siguese que tambien los quadrados de A D, A C, seràn iguales à el de B C (*a. 1.*) y en el triangulo A D C, el angulo en A, es recto, por construcion; de que se infiere que el quadrado de C D, serà igual à los dichos quadrados de D A, A C (*47.*) luego el quadrado de C D, serà igual al de B C (*a. 1.*) y por consequencia sus dos lados, como los triangulos en todo ser (*8.*) con que el angulo B A C, serà recto; que es lo que se devia demonstrar.

Y con esto daremos fin al primer Libro de Eúclides.

ADVERTENCIA.

Todo quanto hasta aqui se ha tratado pertenece al primer Libro de Euclides: pero haviendo yo reconocido que por ser este estudio muy seco à los principiantes, les alienta mucho el empecar à usar, y valerse de las proposiciones; me parecio añadir al fin de cada Libro algunas questiones; y que fuesen tales que se pudiesse responder à ellas, valiendose de las proposiciones que ayan ja passado, de modo que las que van al fin de este Libro, se pueda responder à ellas por el mismo, y las que fueren al fin del segundo por las del primero y segundo, &c.

PROPOSICION I.

Sobre una recta dada, descrivir un quadrado sin valerse de la 46. de este libro.

Sea la dada A B (fig. 21.) *dividase por mitad en C* (10.) *y levantando de este punto la perpendicular C D* (11.) *que sea de la grandeza de la dada* (3.) *se tirara paralela à ella la E F, que passe por el punto D* (31.) *y aciendo D F,*

y

y D E, igual cada una de A C; se daràn A F, B E; digo que A E, es el quadrado que se pide.

Demonstracion. *Porque los angulos en C, son rectos por construcion, y F E, paralela à B A; lo seràn tambien en D (29.) y siendo D F, por construcion igual y paralela à C A; el quadrilatero A D, tendrà los lados A F, C D, iguales y paralelos (33.) y todo el serà un paralelogramo (d. 36.) con los angulos en A, y en F, rectos (34.) y lo mesmo se demonstrerà en el quadrilatero D B; con que la B E, serà paralela de A F (30.) y iguales entre si por serlo qualquiera à la CD (a. 1.) que lo es por construcion de la dada; y por la mesma lo es la F E; luego el quadrilatero A E, serà equilatero y equiangulo; y por consequencia un quadrado (d. 30.) el qual se ha descrito sobre la A B, sin valerse de la 46. como se ha pedido.*

PROPOSICION II.

Dada una recta que sea diagonal de un quadrado, se pregunta si se podrà descrivir su quadrado? Digo que si.

Sea la diagonal A B (fig. 22.) que se dividirà por mitad en C (10.) por cuyo termino se darà la D E, que haga angulos rectos en C (11.)

y haziendo C D, C E, igual cada una de A C (3.) se daràn A E, E B, &c. digo que el quadrilatero D E, serà el quadrado que se pide.

Demonstracion. *Los triangulos A C E, B C E, tienen los lados A C, B C, iguales siendolo à qualquiera de ellos el commun C E; uno y otro por construcion como sus angulos en C, rectos; de que se sigue que los triangulos seràn isoceles* (d. 25.) *y iguales en todo ser* (4.) *y assi el lado A E, lo serà de B E; y los angulos agudos de cada uno iguales entre si* (5.) *y por consequencia medios rectos* (32.) *con que el total en E, serà recto, y lo mesmo se demonstrarà de los otros triangulos; luego el quadrilatero E D, serà el quadrado que se pide.*

PROPOSICION III.

Siendo propuesto un angulo como B A C *(fig. 23.)* acomodar à el la recta D E, de suerte que sea paralela à la B C.

Para esto se haràn los angulos en D, y en E, iguales à los angulos A B C, A C B, cada uno al suyo (23.) *haciendo que las lineas que los forman concurran en un punto como F; y igual à la F D se cortarà A G, y la A H, igual de F E* (3.) *y dese la G H; que esta serà igual à D E; y paralela à B C.* De-

Demonſtracion. *En el triangulo F D E, los angulos en D, y en E, ſon iguales por conſtrucion à los angulos en B, y en C; y aſſi el angulo en F, ſerà igual al de en A* (32.) *y ſiendo en el triangulo A G H, los lados A G, A H, iguales, por conſtrucion, à los lados F D, F E, y los angulos en F, y en A, iguales; ſe ſigue que los triangulos lo ſeràn en todo ſer* (4.) *y la G H, igual de D E; luego eſta eſtarà acomodada al angulo A, como ſe ha pedido: y porque en los triangulos A G H, A B C; los angulos ſobre ſus baſas ſon iguales y los dos en C, lo ſon à dos rectos* (13.) *como los dos en H; ſe ſigue que tomando en lugar de el angulo A C B, ſu igual en H; quedarà eſte con el angulo B C H, iguales à dos rectos* (y por la 28.) *las lineas B C, G H, ſeràn paralelas, como pide la queſtion.*

Proposicion IV.

Dado un punto, como A (*fig. 24.*) buſcar otros dos puntos, de los quales tiradas rectas à el ſean iguales, formando alli angulo recto; ſin que para ello ſe tire linea perpendicular ni paralela à otra; ni tan poco ſe paſſe linea alguna por el dicho punto.

Del punto A, tireſe A B, interminada; y de *de qualquier punto de ella, como de B, con un intervalo menor que A B; se descrivirà el circulo D C; y haziendo qualquiera angulo A B C, se harà igual à el, el angulo A B D (23.) y se darà D C, interminada para cortar la E F, y E G, igual cada una de A E (3.) digo que los puntos G F, son los que se buscan; porque tirando las rectas G A, F A, seràn iguales y formaràn en A, angulo recto.*

Demonstracion. *En los triangulos B C E, B D E, los lados B C, B D, son iguales* (d. 15.) *y B E, comun como sus angulos en B, iguales por construcion; de que se sigue que los triangulos seràn iguales en todo ser* (4.) *y por consequencia sus angulos en E, rectos como los opuestos* (por la 15.) *luego haviendo echo E F, igual de A E; el triangulo A E F, serà isoceles* (d. 25) *y sus angulos en A, y en F, iguales* (5) *y medio rectos* (32.) *y de la mesma manera siendo G E, igual de A E; los angulos que forman en G, y en A, seràn tambien medios rectos; y assi el total en A, serà recto, y las lineas que le forman iguales* (6.) *respecto que los angulos sobre la basa en G, y en F, son medios rectos; con que queda satisfecha la question.*

Otra question se puede proponer sobre esta proposicion, como es que se descriva un quadrado; guardando todos los preceptos del texto: y en tal caso la respuesta se diera haziendo sobre la basa G F, *GF, un triangulo igual al triangulo GAF; que assi se concluiera el quadrado pedido; y si se pusiera terminado el lado del quadrado se hiziera la GA (despues de formado el angulo A) igual à la dada; y lo mesmo AF, y luego formar el dicho triangulo.*

PROPOSICION V.

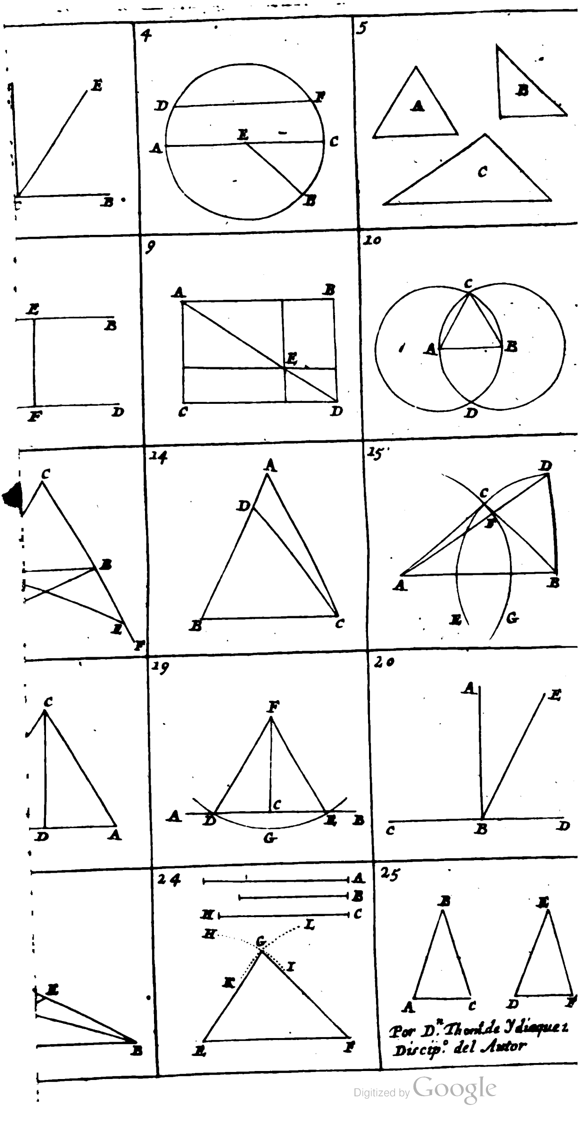
Preguntase si antes de llegar à la 32. deste libro, se puede demonstrar, como los tres angulos de un triangulo son iguales à dos rectos?

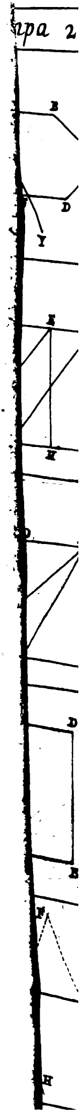
Respondese que si porque siendo un triangulo como ABC (fig. 25.) y dada à BC, del vertice A, la perpendicular AF (12.) y à ella en dicho termino A, la perpendicular AE (11.) prolongandola à una y otra parte; se tendrà lo que se pretende.

Demonstracion. *Porque los angulos EAF, AFC, son dos rectos* (por construcion) *las lineas ED, BC, seràn paralelas (28.) y el angulo EAC, igual à su alterno en C (29.) y si se toma este en lugar de su igual se tendrà el angulo en C, con el angulo CAF, iguales à un recto; luego los del triangulo ACF, seràn iguales à dos rectos; y por la mesma via se demonstrarà como lo son los del triangulo ABF: de que se sigue*

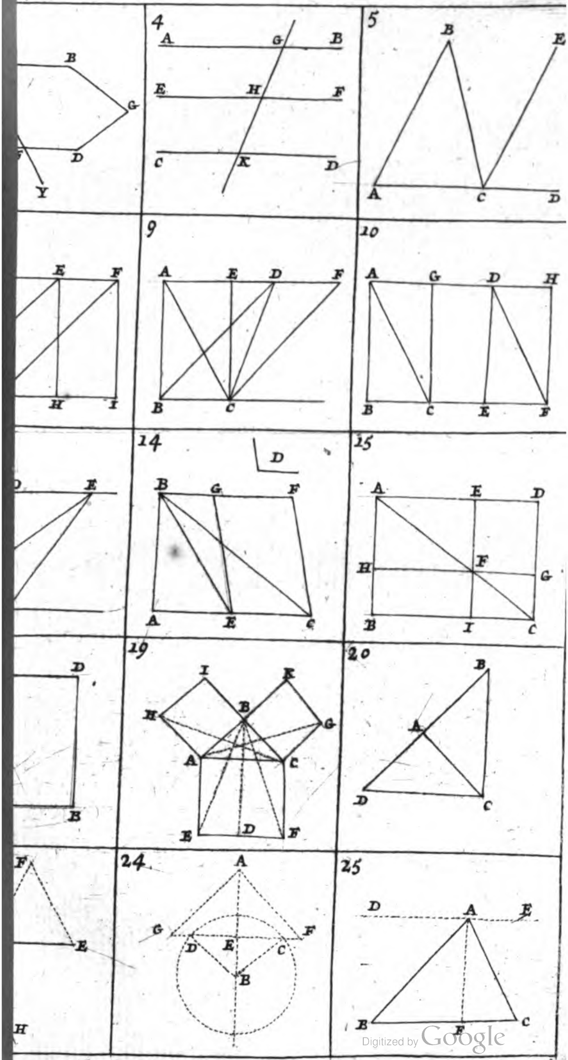
figue que los dos angulos que forman los trian-
gulos rectangulos en A, con los dos de B, y C
feràn iguales à dos rectos, que fon los angulos de
triangulo A B C, conque en todo triangulo fin
llegar à la 31. fe demonftrarà como fus tres angu-
los, &c. Y con efto paffaremos al fegundo Libr
pareciendome que para terminar la idea fobre e
primer Libro que bafta efta digreffion.

L I-


4
5
9
10
14
15
19
20
24
25
Por D.n Thom. de Ydiaquez
Discip.o del Autor


npa 2
B
D
Y
E
H
D
B
F
H

npa 2.



4
A G B
E H F
C K D
5
B E
A C D
9
A E D F
B C
10
A G D H
B C E F
14
D
B G F
A E C
15
A E D
H F G
B I C
19
I K
H B G
A C
E D F
20
B
A
D C
24
A
G F
D E C
B
25
D A E
B F C

LIBRO SEGUNDO.

EN este segundo Libro trata Euclides de la propriedad que tienen las potencias ò quadrados de las lineas rectas; y de la que guardan estos con los rectangulos que de dichas lineas y sus partes se hacen; y es de que depende el fundamento del arte mayor, de la Arithmetica llamada Algebra; y porque da mucha luz à los principiantes el ver cada demonstracion executada por la practica de los numeros, va al fin de cada una la operàcion por Arithmetica: y tanto para esto como para la inteligencia de las proposiciones, que yo añado al fin de cada Libro; serà bueno declarar lo siguiente.

Primeramente, se ha de saver, que quando se hablare del area de una figura; que se ha de entender por el campo ò espacio superficial, contenido en dicha figura, como si por exemplo fuesse un quadrado que tubiesse quatro por lado, cuyo producto de uno por otro hacen 16. y esta es el area del tal quadrado, y suponiendo que cada uno de los 4. es un pie, seràn 16. pies quadrados: y si baras, baras quadradas: y si leguas, leguas, &c. Pero si fuesse la figura un rectangulo, se multiplicaràn las cantidades del lado menor, por las del mayor, y el producto seràn las cantidades quadradas que tendrà de area el rectangulo: de que se infiere que de un triangulo rectangulo se tendrà el area, multiplicando los lados que forman el angulo recto uno por otro, y tomando la mitad del producto; lo que se deduce de la (41.) del primero.

DEFINICIONES.

1. Rectangulo diximos en la definicion (*31. l. 1.*) y se explico en la 36. como era

era un quadrilongo paralelogramo, con ſus quatro angulos rectos, tal es HB (*figura 1. eſtampa 3.*)

2. Gnomon ſe dice à los complimientos de un paralelogramo juntamente con el paralogramo pequeño, que los une con el diametro, como G I E H, que ſon los complimientos con el paralelogramo E I, dicha figura.

Theorema Proposicion I.

Propueſtas dos rectas, que la una eſtè dividida en algunas partes; el rectangulo comprehendido debaxo de las dos, es igual à los rectangulos formados de la no dividida, y de cada parte de la dividida.

Sean las dos rectas C, y A B, (*fig. 2.*) que eſta eſté dividida en algunas partes: como en los terminos F, y H; digo que el rectangulo, comprehendido debaxo de A B, y C, ſerà igual à los tres rectangulos comprehendidos de la no dividida C, y de cada una de las partes de la dividida A B. En el punto A, levanteſe A D, perpendicular à A B (*11. l. 1.*) igual à C (*2. l. 1.*) del punto D, tireſe la D E, paralela

lela à A B, y del punto B, la B E, paralela à A D (*31. l. 1.*) tirense tambien las dos F G, H I. paralelas à AD.

Demonstracion. El quadrilatero D B, es un rectangulo; porque por construcion, es paralelogramo: como assi mesmo el angulo D A B, recto, y lo mesmo serà el angulo A D E, interior opuesto (*29. l. 1.*) conque los quatro angulos seràn rectos (*34. l. 1.*) por lo qual serà rectangulo (*d. 1.*) como tambien AG, F I, y H E; cada uno comprehendido debaxo de una linea igual à C, en las partes de A B, pero estos estan comprehendidos en el total A E, el qual està formado de las dos rectas propuestas; siguese que serà igual à todas sus partes referidas (*a. 9.*) que es lo que se devia demonstrar.

Por numeros.

Tenga la linea C, 5. partes, y la A B, 11. el rectangulo hecho destas dos lineas serà 55. Aora sea la parte A F, 2. F H, 4. y H B, 5. el rectangulo A G, tendrà 10, el otro F I, 20. y el ultimo H E, 25. cuya suma destos tres es 55. igual al rectangulo total A E; que es lo que dize el Theorema.

THEO-

Theorema Proposicion II.

Si una recta se divide en partes, como quiera que sea: los rectangulos comprehendidos debajo de la toda y de cada parte, son iguales al quadrado de la toda.

Sea la recta AB (*fig. 3.*) que à discrecion se dividiò en C; digo; que los rectangulos de AC, y CB, en la toda AB, son iguales al quadrado de AB, descrivase sobre ella, el quadrado AE, (*46. l. 1.*) y del punto C, tirese CF, paralela à BE (*31. l. 1.*)

Demonstracion. El quadrado AE, es igual à todas sus partes (*a. 9.*) que son los rectangulos AF, CE, formados de iguales à AB, y de sus partes; que es lo que se devia demonstrar.

Por numeros.

Tenga AB, 9. partes à saber AC, 4. y CB, 5. el quadrado de AB, es 81. igual à los dos rectangulos hechos de la toda y de sus partes: Porque AC, 4. multiplicados por 9. de AB, producen 36. y los 5. de la otra parte CB, multiplicados por la toda AB, 9. dan 45. que sumados estos dos rectangulos 36. y 45. hazen los mesmos 81. del quadrado de AB.

Theorema Proposicion III.

Si una recta se divide, como quiera que sea, en dos partes: el rectangulo comprehendido de la toda, y de una parte, es igual al quadrado de esta parte, y al rectangulo hecho de las dos.

Sea la linea AB (*fig. 4.*) dividida, como quiera, en el punto C; digo, que el rectangulo de AB, y de una de sus partes, como AC, es igual al quadrado de esta parte, y al rectangulo de las dos. Sobre AC, sea hecho el quadrado AE (*46. l. 1.*) continuese DE, igual de AB (*2. l. 1.*) y acavese el rectangulo AF.

Demonstracion. El rectangulo DB, compuesto de la toda AB, y de su parte AD, igual à AC; serà igual à todas sus partes (*a. 9.*) y estas son el quadrado de AC, y el rectangulo BE, hecho de la parte CB, y CE, igual de AC: que es lo que se devia demonstrar.

Por numeros.

Tenga AB, 8. partes, AC, 3. y CB, 5. El rectangulo hecho de AB, en AC, serà

24.

24. igual al quadrado de la mesma parte AC, que es 9. junto con los 15. que tendrà el rectangulo hecho de dichas partes, porque 9. y 15. son 24.

THEOREMA PROPOSICION IV.

Si una linea recta se divide en dos partes, como quiera que sea; el quadrado de la toda, es igual à los quadrados de las partes, y à dos rectangulos hechos de las mesmas partes.

Sea la linea AB (*fig. 5.*) dividida en E; digo, que el quadrado de AB, serà igual à los de sus partes AE, BE; y à dos rectangulos hechos de estas partes. Sobre la total AB, sea descrito el quadrado BC (*46. l. 1.*) y tirada la diagonal DA: tirese EG, paralela à BD, que cortarà la diagonal en F; por cuyo termino, se darà una paralela à AB (*31. l. 1.*) que toque los lados del quadrado.

Demonstracion. Porque el angulo en B, es recto (por construcion) y por la mesma, formado de lados iguales, el triangulo ABD, serà isoceles (*d. 25. l. 1.*) y sus angulos agudos en D, y en A, medio rectos (*32. l. 1.*) siguese que assi mismo los angulos agudos del triangulo A C D, seràn medio rectos (*a. 3.*) y siendo H F, paralela à C D; y E F à B D; los angulos en H y E, seràn rectos (*29. 1.*) y se ha demonstrado que en los triangulos D B A, D A C, sus angulos en A, son medio rectos luego tambien H F A, A F E, seràn medio rectos (*32. del 1.*) y por consequencia los triangulos A E F, A H F, isoceles (*6. l. 1.*) y la figura H E, quadrado (*d. 30. l. 1.*) y de la mesma manera se demonstrarà serlo, la figura F D, pero su lado F I, es igual à la parte E B, (*34. del 1.*) y E F, à la A E, conque el rectangulo F B, compuesto destas partes, serà igual al F C (*43. l. 1.*) y los quadrados y rectangulos, son partes del quadrado C B; conque les serà igual (*a. 9.*) que es lo que se devia demonstrar.

COROLARIO.

De esta demonstracion consta con evidencia, que los paralelogramos descritos al rededor de la diagonal de un quadrado, son quadrados.

Por numeros.

Tenga A B, 10. A E, 6. y E B 4. el quadrado de A B, serà 100. el de A E 36. y el de E B, E B, 16. El rectangulo E I, tendrà 24. cuyo duplo es 48. que juntos con los 36. y 16. hazen los 100. de todo el quadrado.

THEOREMA PROPOSICION V.

Si una linea recta se divide en dos partes iguales, y en dos desiguales; el rectangulo hecho de las partes desiguales; junto con el quadrado de la parte de en medio; es igual al quadrado de la mitad de toda la linea.

Sea la linea A B *(fig. 6.)* dividida igualmente en C, y inigual en D, digo que el rectangulo de las partes iniguales A D, D B, con el quadrado de la parte de en medio C D; son iguales al quadrado de C B, mitad de la toda. Descrivase el quadrado C E *(46. l. 1.)* dese la diagonal F B, y la D G, paralela à E B; que corte la diagonal en H, por cuyo termino se tirarà interminada X H, paralela à A B, uno y otro *(por la 31. l. 1.)* y por la mesma, se acavarà el rectangulo D K.

Demonstracion. Los paralelogramos I G, D X, son quadrados (*c. de la 4.*) y la linea D H, igual à D B (*d. 30. l. 1.*) como I H, à C D, *(34. l. 1.)* conque I G, serà el quadrado de C D; y los rectangulos A I, C X, que tienen

nen basas iguales, y estan entre unas mesmas paralelas, son iguales *(36. l. 1.)* y los cumplimientos CH, EH, lo son tambien *(43. l. 1.)* à los quales si se les añade el comun quadrado XD, los compuestos CX, DE, seràn iguales *(a. 2.)* y assi DE, serà igual à CK *(a. 1.)* à quienes añadiendo el cumplimiento CH; el gnomon LNM, serà igual al rectangulo AH, *(a. 2.)* y finalmente añadiendo à estos iguales, el quadrado IG, el rectangulo AH, con el quadrado IG, seràn iguales al dicho gnomon con el quadrado IG; y estos dos convienen con el quadrado CE; luego iguales *(a. 8.)* conque el rectangulo AH, comprehendido debaxo de las partes iniguales AD, DB, con el quadrado de en medio CD, es igual al quadrado de CB, mitad de la propuesta: que es lo que se devia demonstrar.

Por numeros.

Tenga AB 10. partes, à saber AC, 5. CD, 2. y DB, 3. el rectangulo hecho de AD, 7. en DB, 3. serà 21. que junto con el quadrado de CD, que es 4. hazen 25. que es igual al quadrado de la mitad de la linea AC, ò CB, como lo pide la proposicion.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION VI.

Si una linea recta se divide en dos igualmente, y en derecho, se le añade otra recta: el rectangulo de la compuesta en la añadida, con el quadrado de la mitad de la propuesta; es igual quadrado de esta mitad con la añadida, como una.

Sea propuesta la linea A B, *(fig. 7.)* dividida igualmente en C, y que se le añada directamente la B D; digo, que el rectangulo de la total A D, y de la añadida B D, con el quadrado de la mitad C B; es igual al quadrado de C D, compuesta de la mitad de la propuesta y la añadida. Sobre la C D, sea descrito el quadrado C E, *(46. l. 1.)* dese la diagonal F D; y del punto B, la B G, paralela à C F, qne corte la diagonal en H; por cuyo termino se tirarà la I L, paralela à A D, *(31. l. 1.)* y acavase el rectangulo A I.

Demonstracion. Porque F H, D H, son quadrados *(c. de la 4.)* el lado D I, serà igual de la añadida B D; y el rectangulo A I, estarà comprehendido debaxo de la total A D, y de D I; pero los rectangulos C L, C H, son iguales, *(36. l. 1.)* y este es igual al rectangulo HE. *(43. l. 1.)* siguese que lo seràn tambien AK, HE, *(a. 1.)* conque si à estos dos se les añade el comun rectangulo CI, el rectangulo AI, serà igual al Gnomon ONM, *(a. 2.)* y por la mesma, si à estos, se les añade el quadrado KG, que es el de CB; el rectangulo AI, con el quadrado KG, serà igual al gnomon ONM, con el dicho quadrado KG; y estos convienen con el quadrado CE, luego iguales *(a. 8.)* y por consequencia lo seràn tambien el rectangulo AI, con el quadrado KG: que es lo que se devia demonstrar.

Por numeros.

Sea AB, de 8. partes, AC, 4. CB, otras 4. y BD, 3. y assi la toda AD, serà 11. que multiplicados por 3. de BD, igual de DI, producen 33. por el area del rectangulo AI, que junto con el quadrado de CB, 16. hazen 49, iguales à el quadrado de CD, que tiene 7. por lado.

THE-

THEOREMA PROPOSICION VII.

Si una recta se divide en dos partes como quiera que sea; el quadrado de la toda, con una de sus partes, es igual al quadrado de la otra, y à dos rectangulos comprehendidos de la total, y de la parte primera que se tomare.

Sea propuesta la recta A B *(fig. 8.)* dividida como quiera en el punto E; digo, que los quadrados de la total A B, y de la parte A E, son iguales al quadrado de la otra parte E B, y à dos rectangulos hechos de A B, y A E. Sobre A B, sea descrito el quadrado A D *(46. l. 1.)* y tirado la diagonal B C; y G E, paralela à A C, que corte la diagonal en F; por donde se tirarà la H I, paralela à A B *(31. l. 1.)*

Demonstracion. Los paralelogramos E I, H G, son quadrados *(c. de la 4.)* y este ultimo serà el de la parte A E, igual de H F, *(34. l. 1.)* y siendo los rectangulos A G, H D, comprehendidos cada uno debaxo de iguales à la propuesta A B, como son A C, y C D, y de C G, igual à la primera parte A E; y estando en cada uno de los rectangulos, incluido el el quadrado H G; cierto es que si se les juntasse el quadrado E I, de la segunda parte, que el todo seria igual al quadrado A D, junto con el quadrado H G; que es lo que se devia demonstrar.

Por numeros.

Tenga A B, 9. partes, A E, 4. y E B, 5. el quadrado de la toda A B, serà 81. que sumado con el de A E, 16. hazen 97. Aora un rectangulo hecho de A B, en G C, serà 36. cuyo duplo 72. sumados con el quadrado de E B, que es 25. hazen los mesmos 97.

Theorema Proposicion VIII.

Si una recta se divide como quiera en dos partes, y en derecho se le añade la una; el quadrado de la compuesta serà igual à quatro rectangulos hechos de la propuesta en su parte añadida, juntos con el quadrado de la otra parte.

Sea propuesta la AB (*fig. 9.*) dividida como quiera en C, igual à C B; añadasele en derecho BD; digo, que el quadrado de la compuesta A D, es igual à quatro rectangulos hechos

hechos de AB, en BD, juntos con el quadrado de la parte AC. Sobre la compuesta descrivase el quadrado FD (*46. l. 1.*) tirese el diametro AE; y CN, BP, paralelas à DE, (*31. l. 1.* que cortaràn la diagonal en O, y en I, por cuyos terminos, sean dadas MH, GR, paralelas à AD (*31.*) y se tendràn los rectangulos CG, LK, PH, MB, y NR, que seràn quadrados (*c. de la 4.*)

Demonstracion. El quadrado FD, hecho sobre la compuesta, es igual à todas sus partes (*a. 9.*) pero los rectangulos LB, OD, y PM, estan formados de iguales lados, que son las partes AB, CB; y juntando el rectangulo MI, al rectangulo PH; se tendrà en los dos, un rectangulo igual à qualquiera de los dichos; conque solo quedarà que incluyr el quadrado CG, que es el de la parte AC: luego si una linea se divide, &c.

Por numeros.

Sea AB, de 7. partes, AC, de 3. y CB, de 4. conque la toda AD, serà 11. cuyo quadrado es 121. y un rectangulo hecho de AB, 7. y de BD, 4. serà 28. que tomado quatro vezes vienen 112. à quien añadidos los 9. del quadrado de AG, hazen los mesmos 121.

THE-

Theorema Proposicion IX.

Si una linea se divide en dos partes iguales y en dos desiguales: los quadrados de las desiguales seràn duplos de los quadrados de la mitad de la toda, y de la parte de en medio.

Sea dada ò propuesta la AB (*fig. 10.*) dividida igualmente en C, y desigual en D; digo, que los quadrados de AD, DB, de las partes desiguales, seràn duplos de los quadrados de AC, mitad de la propuesta, y de CD, parte de en medio. Levantese CF, perpendicular à la dada (*11. l. 1.*) y igual de AC (*2. l. 1.*) dense AF, BF; y despues la DE, paralela à CF; y EH, à CD (*31. l. 1.*) y finalmente tirese AE.

Demonstracion. En el triangulo ACF, los lados AC, CF, son iguales; y el angulo en C, recto, uno y otro por construcion, siguese que sus angulos agudos en A, y en F, seràn iguales (*5. l. 1.*) y por consequencia medios rectos (*32. l. 1.*) y lo mesmo se demonstrarà en el triangulo FCB; conque el angulo total en F, serà recto (*32. l. 1.*) Pero en el triangulo BDE, el lado DE, siendo paralelo de

CF,

CF; tendrà el angulo en D, recto (*29. l. 1.*) y demonstrado su agudo en B, medio recto, lo serà tambien su agudo en E (*32. l. 1.*) y el triangulo isoceles (*6. l. 1.*) y lo mesmo se puede demonstrar en el triangulo F H E. Esto supuesto el quadrado de AF, serà igual à los de AC, CF (*47. l. 1.*) conque serà duplo del quadrado de AC; y por la citada el quadrado de EF, serà duplo del quadrado de EH, ò de su igual CD, parte de en medio; y por la mesma, el quadrado de A E, es igual à los quadrados de AF, y de EF; conque serà duplo de los quadrados de A C, y de CD; y el mesmo quadrado de A E, es igual à los quadrados de AD, y de DE, ò de BD, su igual: luego los quadrados de AD, y DB, son duplos de los quadrados de A C, mitad de la dada, y de CD, parte de en medio: que es lo que se devia demonstrar.

Por numeros.

Tenga A B, 10. su mitad AC, 5. C D, 3. y D B, 2. el quadrado de A D, serà 64. que sumado con el quadrado de B D, 4. haràn 68. y el quadrado de A C, que es 25. sumado con el de C D, 9. suman 34. mitad de lo dicho.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION X.

Si una linea se divide en dos igualmente; y en derecho se le añade otra qualquiera: el quadrado de toda la compuesta, con el quadrado de la añadida, son duplos del quadrado de la mitad de la dividida, y del quadrado de la otra mitad, y la añadida, como una.

Sea la recta AB (*fig. 11.*) dividida igualmente en C; y añadida enderecho la B D; digo, que los quadrados de la compuesta A D, y de la añadida B D. seràn duplos de los quadrados de A C, mitad de la dividida, y de C D, que es la otra mitad con la añadida. Igual de A C, sobre la propuesta, levantese la perpendicular C E (*11. l. 1.*) y paralela à ella, por el termino D, la F G (*31. l. 1.*) interminada; y tirese la E F, paralela à C D, hasta cortar en F; y por los terminos E, y B, dese la E G, hasta cortar en este punto la F G: dense A E, A G.

Demonstracion. En el triangulo A C E, los lados A C, C E, son iguales, y el angulo en C, recto; uno y otro por construcion sigue se que sus dos angulos agudos seràn iguales (5.

(5. l. 1.) y por consequencia medio rectos *(32. l. 1.)* y lo mesmo se demonstrarà en el triangulo E C B; de suerte que el angulo A E B, serà recto *(32. l. 1.)* y porque E F, se ha hecho paralela à C D; y D F, à C E; y el angulo en C, es recto *(por construcion)* el angulo C D F, lo serà tambien *(29. l. 1.)* y por consiguiente C F, un paralelogramo rectangulo. Pero siendo en el triangulo B E C, el angulo en E, medio recto, el angulo B E F, lo serà tambien, y el angulo en F, es recto: conque el angulo en G, serà medio recto; y el triangulo isoceles *(6. l. 1.)* y lo mesmo diremos del triangulo G D B. Aora, el quadrado de A E, es duplo del quadrado de A C, *(47. l. 1.)* como el quadrado de E G, duplo del de E F, ò C D, su igual; y por la mesma el quadrado de A G, es igual à estos dos; luego este serà duplo de los quadrados de las partes A C, y C D; y el mesmo A G, es igual à los quadrados de A D, y D G; de manera que los quadrados de A D, que es toda la compuesta, y de B D, que es la añadida; son duplos de los quadrados de A C, mitad de la dada, y de C D, la otra mitad con la añadida; que es lo que se devia demonstrar.

Por

Por numeros.

Tenga AB, 6. AC, 3. CB, 3: y la parte añadida BD, 4. el quadrado de la compuesta AD, serà 100: y el de BD, 16. que sumados, hazen 116. el quadrado de AC, que es 9. y el de CD, 49. juntos hazen 58. que es mitad de los dichos 116.

Problema. Proposicion XI.

Dividir una recta en dos partes tales; que el rectangulo comprehendido de toda ella en la una; sea igual al quadrado de la otra.

Sea dada la recta AB (*fig. 12.*) Descrivase sobre ella el quadrado AC (*46. l. 1.*) y haviendo dividido DA, igualmente en E (*10. l. 1.*) se darà la BE: y igual à ella se harà EF, sobre DA, prolongada: y sobre AF, sea descrito el quadrado FG; y continuado el lado HG, hasta I; digo, que la dada està dividida en G, de suerte que el rectangulo CG, comprehendido de BC, igual à la dada, y de la parte BG; es igual al quadrado GF, hecho de la otra parte.

Demonstracion. Porque la DA, se dividiò igual-

igualmente en E, y añadio en derecho la AF; el quadrado de ſu mitad con la añadida, quiero dezir, de FE, ò de ſu igual BE; ſerà igual al rectangulo de DF, en AF, y al quadrado de AE (*6.*) Pero el quadrado de BE, es igual à los quadrados de AB, AE, (*47. l. 1.*) ſigueſe que los quadrados de AB, y AE, ſeràn tambien iguales à dicho rectangulo de DF, en AF, y al quadrado de AE (*a. 1.*) y quitando por comun el quadrado de AE, de uno y otro lado; quedaràn iguales el quadrado de AB, y el rectangulo de DF, en AF (*a. 3.*) y pues el quadrado AC, y el rectangulo FI, ſon iguales; quitandoles el rectangulo comun AI; quedaràn el rectangulo GC, y el quadrado GF, iguales; que es lo que ſe devia hazer.

Eſta propoſicion no ſe puede probar por numeros racionales; mas ſi por rayzes, ò numeros quadrados.

THEOREMA PROPOSICION XII.

En todo triangulo obtusangulo; el quadrado del lado opuesto al angulo obtuso, es igual à los quadrados de los otros dos lados, y à dos rectangulos hecos de un lado, y de lo prolongado de el, desde el angulo obtuso, hasta la perpendicular, que sobre este lado cayere del angulo agudo.

Sea en el triangulo A B C (*fig. 13.*) el angulo en C, obtuso, y sobre B C, prolongada, baxada la perpendicular A D (*12. l. 1.*) digo, que el quadrado de A B, es igual à los quadrados de A C, y C B; y à dos rectangulos hechos de B C, en la parte prolongada C D.

Demonstracion. El quadrado de A B, es igual à los quadrados de A D, y D B (*47. l. 1.*) y por la mesma lo es el quadrado de A C, de los quadrados de A D, y D C: Pero los quadrados de B C, C D; con dos rectangulos destas partes, son iguales al quadrado de B D, (*4.*) siguese que los quadrados de B C, C D, con sus dos rectangulos, y el quadrado de A D, seràn tambien iguales al quadrado de A B (*a. 1.*) y (*por el mesmo*) si en lugar de los quadrados

de

de A D, D C; ſe toma el quadrado de A C, que les es igual, ſe tendràn los quadrados de A C, C B, con los dos rectangulos, iguales al quadrado de A B: que es lo que ſe devia demonſtrar.

Por numeros.

Sirve eſta Propoſicion para hallar el area de un triangulo, teniendo conocidos ſus tres lados. Exemplo tenga A B, 20. partes, A C, 13. y B C, 11. el quadrado de A B, ſerà 400. el de A C, 169. y el de B C, 121. la ſuma deſtos dos ultimos, es 290. que reſtados de 400. reſtàn 110. por los dos rectangulos hechos de B C, y D C; cuya mitad es 55. por el uno, que partidos por los 11. de B C, ſalen al cociente 5. por el valor de C D; y ſu quadrado 25. reſtado del quadrado de A C, que es 169. reſta el quadrado de A D, 144. cuya raiz es 12. por el valor de la perpendicular A D.

Theorema Proposicion XIII.

En todo triangulo acutangulo, el quadrado del lado opuesto al angulo agudo, es menor de los quadrados de los lados que forman dicho angulo; de dos rectangulos hechos de uno destos lados, y de la parte que ay de el entre el angulo agudo, y la perpendicular, que cae sobre el tal lado de su angulo opuesto.

Sea propuesto el triangulo A B C *(fig. 14.)* y elegido por agudo el angulo en C: Dese la perpendicular A D *(12. l. 1.)* digo, que el quadrado de A B, opuesto al angulo agudo, es menor de los quadrados de A C, C B; de dos rectangulos hechos de B C, en su parte D C.

Demonstracion. Porque la B C, està dividida en D; los quadrados de B C, D C, son iguales al quadrado de la parte B D, y à dos rectangulos hechos de B C, en la parte D C, *(7.)* juntese à uno y otro, el quadrado de A D; y se tendràn los quadrados de B C, D C, y A D, iguales à los quadrados de B D, A D, con los dos rectangulos de B C, en D C *(a. 2.)* Aora en lugar de los quadrados de A D, D B, pongase el quadrado de A B; y assi mesmo en lu-

lugar de los quadrados de A D, D C; pongase el quadrado de A C, que les son iguales (*47. l. 1.*) y en tal caso los quadrados de A C, B C, seràn iguales al quadrado de A B, y à dos rectangulos hechos de B C, en D C: luego el quadrado del lado A B, es menor que los quadrados de los otros dos lados, del valor de los dichos rectangulos; y lo mesmo succederà, haziendo la demonstracion sobre el otro lado.

Por numeros.

Tenga el lado B C, 21. pies, A C, 20. y A B, 13. el quadrado de B C, serà 441. el de A C, 400. y el de A B, 169. restese este de 841. (suma de los dos primeros quadrados) y restaràn 672 por los dos rectangulos hechos de B C, y D C; tomese la mitad que es 336. para el uno, que partidos por 21. de B C, salen 16. para D C, que à 21. van 5. para la parte B D; cuyo quadrado 25. quitado del de A B, 169. restaràn 144. por el quadrado de A D; cuya raiz 12. serà el valor de la perpendicular.

PROBLEMA PROPOSICION XIV.

Hazer un quadrado igual à un rectilineo dado.

Queriendo hazer un quadrado igual à un rectilineo, como A (*fig. 15.*) se harà (por la *45. l. 1.*) el rectangulo D B, igual al rectilineo A; y si los lados D C, D E, fuessen iguales, se huviera logrado el intento: Pero siendo desiguales; continuese B C, de modo, que C F, sea igual à D C; y dividiendo la B F, en dos igualmente en G; se descrivirà deste termino el semicirculo F H B: prolonguese D C, hasta tocar la circonferencia en H; digo, que el quadrado de C H, es igual al rectangulo D B: dese la H G.

Demonstracion. Estando la B F, dividida igualmente en G, y desigual en C; serà (*por la 5.*) el rectangulo de B C, en C F, ò C D, su igual (que es el rectangulo D B,) junto con el quadrado de la parte de en medio G C; igual al quadrado de G B, ò G H, que le es igual (*d. 15. l. 1.*) y este siendo igual à los quadrados de C G, y C H, (*47. l. 1.*) se seguirà que estos dos quadrados seràn iguales al rectangulo D B, con el quadrado de C G; y este por comun quitado de una y otra

par-

parte; quedarà el quadrado de CH, igual al rectangulo DB *(a. 3.)* y este se ha hecho igual al rectilineo A; luego dicho rectilineo serà tambien igual al quadrado de CH *(a. 1.)* que es lo que se devia hazer.

Aqui se termina el segundo Libro de Euclides, y siguen algunas Proposiciones del Autor.

PROPOSICION. I.

Conocido en un rectangulo, uno de sus lados, y la suma del otro con la diagonal, y la diferencia destas dos; prejuntase si se podrà conocer el otro lado?

Respondese que si: porque siendo el rectangulo por exemplo AE, (fig. 16.) *que la AD, sea conocida de 15. y que la suma de la diagonal AE, con el lado ED, sea 25. y su diferencia 9. digo que ED, tendrà 8.*

Demonstracion. *Prolonguese ED, por una y otra parte; y con el intervalo de AE, descrivase el semicirculo BAC; y se tendràn BE, y EC, igual cada una de AE,* (d. 15. l. 1.) *y añadiendo à la una BE, el lado ED; se tendrà BD, igual* *à la ſuma de A E, E D, (2. 2.) y quitando el dicho lado E D, de la otra E C; quedarà D C, diferencia entre A E, y E D: luego toda la B C, serà conocida de 34. y ſu mitad que es igual à A E, tendrà 17. que quitados de los 25. de la ſuma de A E, E D, quedan 8. por el valor de E D, como ſe ha dicho.*

PROPOSICION II.

Siendo en la dicha figura conocido el diametro B C, de 34. y la A D, de 15. ſe pregunta por el valor de B D, y D C.

Reſpueſta. Digo que la B D, tiene 25. y D C, 9.

Demonſtracion. *Porque B C, tiene 34. tendrà A E igual à ſu mitad* (d. 15. l. 1.) *17. de cuyo quadrado 289. quitando el quadrado de A D, 225. quedaràn 64. por el quadrado de E D* (47. l. 1.) *cuya raiz quadrada 8. serà el valor de E D, que añadidos à los 17. de B E, hacen 25. por el valor de B D, y quitando eſtos miſmos 8. de la otra mitad E C, quedaràn 9. para D C, como ſe à dicho arriba.*

De lo dicho ſe infiere que proponiendonos por arithmetica un numero, exemplo 34. à dividir en dos partes tales, que multiplicando la una por la

otra

otra hagan 225. que no habrà otra cosa que hacer que dividir el numero dado 34. por mitad en 17. y 17. y multiplicada una por otra restar del producto 289. los 225. de cuya resta 64. sacada la raiz quadrada 8. añadirla à la una mitad 17. y haràn 25. y restarla de la otra que resteràn 9. y se tendrà el 34. propuesto dividido en 25. y 9. cuyo producto de uno por otro hacen los 225. pedidos: Y advierto que se note esta regla y su demonstracion geometrica que queda ariba, porque importerà para responder à otras proposiciones.

PROPOSICION III.

Dado un rectangulo conocida su area de 60. y la suma de sus dos lados de 17. preguntase si se puede scaver el valor de cada uno geometricamente?

Digo que si: porque respecto que el area de un rectangulo es igual al producto de un lado por otro, dividiendo (por la antecedente) los 17. en dos partes tales que multiplicando la una por la otra hagan los 60. del area se hallarà que vienen 12. por el major lado, y 5. por el menor, cuya suma hazen los 17. dados, cuya demonstracion queda arriba.

PROPOSICION IV.

Dada conocida el area de un rectangulo de 12. y su diagonal de 5. se pregunta si geometricamente se puede dar el valor de cada lado?

Respondese que si: porque en todo rectangulo el quadrado hecho de sus dos lados como de uno, puede tanto como el duplo del rectangulo junto con el quadrado de la diagonal; y assi siendo el rectangulo B C (fig. 17.) *se prolongarà A C, de suerte que C E, sea igual à C D; y sobre A E, acavese el quadrado E F* (45. l. 1.) *y prolonguense los otros lados del rectangulo hasta cortar los del quadrado en H, y en I; y dese la E F.*

Demonstracion. (*Por el c. de la 4.*) *los quadrilateros E D, D F, son quadrados y el primero es el de C D, y el segundo el de A C, y los dos son iguales al de la diagonal A D* (47. l. 1.) *y juntando à dichos quadrados los complimientos B C, H I, que son iguales* (43. l. 1.) *el quadrado de E F, echo sobre la A E, igual à los lados del rectangulo, serà igual al duplo del rectangulo propuesto y al quadrado de su diagonal* (a. 9.) *de que se sigue que si se dobla el area 12. y su duplo 24. se suma con 25. quadrado de la diagonal y de la suma 49. se saca la raiz que es 7. se tendrà en este nu-*

numero el valor de AE, igual à los lados del rectangulo: conque dividiendo (por mi tercera) el 7. en dos partes tales que el producto de la una en la otra aga 12. se allarà que se divide en tres y en 4. por el valor de los lados, como se ha pedido.

PROPOSICION V.

Dada en el rectangulo C B (*fig. 18.*) la suma de sus dos lados de 14. y su diagonal de 10. se pregunta si geometricamente se podrà dar el valor de cada lado, sin valerse de la antecedente?

Digo que si: prolonguese CD, de suerte que DG, sea igual à AC, y GE, igual à CD; y dividiendo la DE, por mitad en F; se accabarà la figura segun la 9. y se tendrà el quadrado de DH, duplo de DF, y el de HI. duplo de el de FG; y à estos es igual el de DI, uno y otro (por la 47. l. 1. *) y por la mesma el dicho quadrado de DI, es igual à los quadrados de DG, GI, ò de su igual GE: luego siendo los quadrados de DG, GI, iguales à los de AC, CD; y estos iguales de AD (* 47. l. 1. *) tambien el de DI, serà igual al de AD; y assi serà de 100. respecto los 10. de la diagonal, y porque toda la DE, es 14. serà el quadrado de DF, 49. y su duplo*

que

que es el de DH, 98. que quitados de los 100. del de DI, queda 2. para HI, quadrado duplo de FG; de cuya mitad 1. tomando la raiz que es uno y añadida à la una mitad DF, que es 7. se tendrà la DG, de 8. y tanto tendrà su igual AC; y si se quita el uno de la FG, de la otra mitad FE, quedaràn 6. para GE, igual de CD: conque habremos descubierto lo que se buscava.

De lo dicho se infiere que si nos propusieran un numero, por exemplo 14. à dividir en dos partes tales que la suma de sus quadrados aga una cierta cantidad como 100. que no habrà otra cosa que hazer que tomar la mitad de 14. que quadrada harà 49. cuyo duplo restado de 100. restaràn 2. de quien tomada la mitad, y della la raiz que serà 1. se añadirà à la una mitad 7. y haràn 8. por la una parte, y quitada de la otra quedaràn 6. y se tendràn las dos partes pedidas de 6. y 8. que la suma de sus quadrados hazen 100.

PRO-

PROPOSICION VI.

Siendo dado el rectangulo A D (*fig. 19*) que el quadrado de A C, C D, como de una sola linea, junto con el quadrado de su diferencia sea conocido de 200. y assi mesmo conocido el quadrado de D C, de 64. preguntase si se podrà saver la superficie del rectangulo?

Digo que si: porque los quadrados duplos de los lados del rectangulo son iguales à los 200. dados; prolonguese C E, igual de A C, y B G, de A B; y dense A G, A E, y E G.

Demonstracion. *Porque en el triangulo A C E, los lados E C, C A, son iguales por construcion, y el angulo en C, recto; los angulos en A, y en E, seràn iguales* (5. l. 1.) *y medios rectos* (32. l. 1.) *y de la mesma manera siendo el triangulo A B G, isosceles, por construcion, y el angulo en B, recto tendrà sus angulos en A, y en G, iguales y medios rectos; de que se infiere que el angulo C A F, serà medio recto: conque E A G, serà recto, y el triangulo E A F, isosceles, como el triangulo A C F; de que se sigue que F D, serà la diferencia de los lados del rectangulo, y E D, la suma, y siendo el* *el quadrado de A E, duplo del de A C, y el de A G, del de A B (47. l. 1.) y por la mesma el de E G, igual al de estos duplos; y en el triangulo F D G, el angulo en G, se ha dicho ser medio recto el triangulo serà isoceles, y F D, es la diferencia de los lados del rectangulo; conque tambien lo serà D G, cuyo quadrado junto con el quadrado de D E, suma de dichos lados serà igual al de E G, que se ha dicho serlo de los quadrados duplos de los mesmos lados.*

Esto supuesto si se dobla el quadrado de C D, y su duplo 120. se resta de los 200. y de la resta 72. se toma la mitad 36. y della su raiz que es 6. se tendrà el valor de A C, y siendo la raiz de 64. 8. serà tanto el valor de C D: y assi el producto de 6. por 8. que es 48. serà el area del rectangulo como se ha pedido.

PROPOSICION VII.

Siendo en el triangulo rectangulo ABC (*fig. 20.*) dada la suma de sus tres lados de 12. y su area de 6. se pregunta si geometricamente se podrà saber el valor de cada lado?

Digo que si: porque en todo triangulo rectangulo la mitad del quadrado echo de la suma de los tres

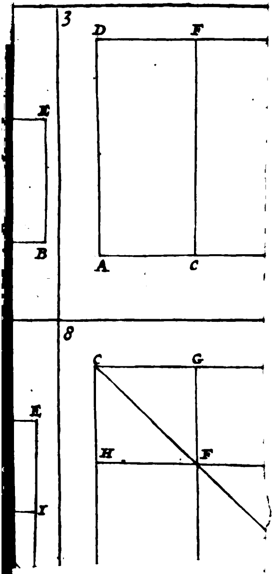
tres lados como de uno puede tanto como el duplo del triangulo, junto con un rectangulo echo de la mesma suma de los tres lados del triangulo en su diagonal; prolonguese B C, de suerte que B D, sea igual à A B; y C E, igual à C A; y por el termino A, dese la E A, indeterminada, y dando de D, una paralela à A C, que corte la A E, interminada en H; y accabado el rectangulo D Y; se darà la A F, paralela à C D.

Demonstracion. *Porque en el triangulo C E A; C E, es igual de A C, y el angulo en C, recto seràn sus angulos en A, y en E, medios rectos (32. l. 1.) y siendo H D, paralela à A C; el angulo en D, serà recto (29. l. 1.) y E H D, medio recto, conque el triangulo H D E, serà isoceles, y por consequencia mitad de un quadrado cuyo lado D E, se ha hecho igual à los tres lados del triangulo propuesto; y de la mesma manera se demonstrarà que los triangulos H Y G, A F G, son tambien isoceles y siendo los quadrados de B C, y A C, iguales al quadrado de A B (47. l. 1.) y el triangulo A C E, mitad del quadrado de A C, como el triangulo A F G, mitad del quadrado de B C; y assi mesmo el triangulo H G Y, mitad del quadrado de A B: se sigue que serà este triangulo igual de los otros dos y si en lugar dellos se añade el trapes D B G H; se harà el rectangulo Y D, y este junto con el rectangulo F C duplo del triangulo propuesto serà el dicho triangulo H D E,*

igual

igual al duplo del triangulo propuesto, y al rectangulo Y D, echo de su diagonal en sus tres lados. De que se infiere que doblando el area 6. y restado su duplo 12. de 72. area del triangulo H D E, restan 60. que partidos por 12. valor de D H, da al cociente 5. por la cantidad de D B, igual de A B; de manera que en el triangulo A B C, tenemos conocida la diagonal, cuyo cumplimiento à 12. que es 7. serà el valor de los lados A C, B C; y dividiendo (por mi 5. deste) el 7. en dos partes tales, que la suma de sus quadrados haga el quadrado de A B, se hallarà que el 7. se divide en tres y en quatro, quedando assi satisfecha la question.

Por esta Proposicion se pueden proponer varias questiones, y en particular se puede dar de un triangulo rectangulo conocido el duplo de su area, y tambien el rectangulo echo de la suma de sus tres lados en su diagonal: y à esta question se respondiera sumando el duplo del triangulo con dicho rectangulo, y de su duplo sacar la raiz quadrada laqual seria el valor de la suma de los tres lados del triangulo propuesto lo que savido, se seguirà la operacion echa arriba. Y esto basta para conocimiento de lo que se ha tratado en este segundo Libro.



cĩa del circulo, y prolongada no lo

H cor-

LI-

LIBRO TERCERO.

EN este tercer Libro trata Euclides, de la propriedad de los circulos, sus tocamientos y intersecaciones; y de la que tienen las rectas, que dedentro y fuera de la circumferencia se pueden tirar à qualquier parte del circulo.

DEFINICIONES.

1. Los circulos que tienen iguales diametros, ô semidiametros son iguales.

2. Una linea recta se dize tangente, quando tocando la circumferencia del circulo, y prolongada no lo

corta: tal es la A C (*fig. 16 Eſtampa 4.*) que toca el circulo en A.

3. Los circulos ſe dizen tocarſe, quando tocandoſe uno à otro no ſe cortan, como lo hazen los de las figuras 10. y 11. que ſe tocan en C.

4. Las rectas en el circulo diſtan igualmente del centro, quando las perpendiculares, que de eſte ſe tiraren à ellas ſon iguales.

Eſta definicion es adequada, reſpecto que el meſmo apartamiento de uñas y otras, ſon las meſmas perpendiculares.

5. Segmento de circulo es una figura, terminada de una linea recta, y parte de la circumferencia de un circulo.

6. El angulo de un ſegmento, es un angulo formado de la circumferencia, y una linea recta.

7. Angulo en el ſegmento es el que ſe forma de dos lineas, que de los extremos de la recta del ſegmento ſe

ti-

tiran à qualquier punto de la circumferencia.

8. Un angulo ſe dize eſtar ſobre el arco, quando eſte le eſtà opueſto, y le ſirve de baſa.

9. Sector es una figura contenida de dos ſemidiametros, y del arco comprendido entre ellos.

10. Semejantes ſegmentos de circulo ſon los que tienen ò reciven iguales angulos.

Problema. Proposicion I.

Allar el centro de un circulo dado.

Sea el circulo A D B *(fig. 1. eſtampa 4.)* propueſto à allar ſu centro. Tireſe qualquiera recta, que ſus extremos toquen en la circonferencia como A B, y dividida por mitad en C *(10. l. 1.)* ſe levantarà de eſte punto la perpendicular C D *(11. l. 1.)* prolongandola haſta tocar la circumferencia en E; y dividida por mitad la D E, en el punto F, havremos hallado en dicho punto el centro que ſe buſca; y ſi eſte no lo fuere, sea lo otro como G; dense A G, G B, y C G.

Demonstracion. En los triangulos A G C, C G B; los lados A G, B G, son iguales *(d.15.l.1.)* como A C, y C B (por construcion) y la C G, comun: de que se sigue que dichos triangulos seràn iguales en todo ser *(c. de la 8. l. 1.)* y por consequencia lo seràn sus angulos en C, y la linea C G, perpendicular: pero la C D, lo es por construcion; conque de un punto se podràn levantar dos perpendiculares, lo que implica *(c. 4. 32. l. 1.)* luego el centro no puede estar fuera de la linea E D, ni ser otro que el punto F, que la divide en dos igualmente.

COROLARIO.

De esta proposicion consta con evidencia; que si à una recta, cuyos extremos se terminan en la circumferencia de un circulo: la divide otra por mitad en angulos rectos. Que en esta ultima estarà el centro de aquel circulo.

THEO-

Theorema Proposicion II.

Si de dos puntos tomados en la circumferencia de un circulo, se tirare una recta; caerà toda dentro de el circulo.

Sean (*en la fig. 2.*) dados en la circumferencia los puntos B, y C, y de ellos tirada la recta B C; digo, que estarà enteramente dentro de el circulo: y si esto no fuere, y se quisiere que cayga fuera como B D C; y que esta sea una linea recta: despues de allado el centro A (*1.*) se tiraràn à el las rectas A B, A C, y A D.

Demonstracion. Porque el triangulo A B C, tiene los lados A B, A C, iguales (*d. 15. l. 1.*) lo seràn tambien sus angulos en B, y en C, (*5. l. 1.*) y porque B D C, se quiere que sea una linea recta; el angulo A D C, por externo, de el triangulo A B D, serà mayor que el interno en B (*16. l. 1.*) y por consequencia mayor que el angulo en C: de que se sigue, que en el triangulo A D C, el lado A C, opuesto al mayor angulo serà mayor que el lado A D, opuesto al menor (*19. l. 1.*) y A E, es igual de A C; con que tambien deviera ser mayor que A D, y la parte mayor que el todo implica (*a. 9.*) luego la recta B C, cae toda den-

dentro de el circulo y no fuera; que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION III.

La recta que pasando por el centro de un circulo cortare à otra (cuyos extremos toquen la circumferencia) en dos partes iguales; la cortarà en angulos rectos: y si la corta en angulos rectos, la dividirà en dos partes iguales.

Sea la recta A C (*fig.* 3.) que pasando por el centro F, corte en E, la B D, por mitad; digo, que la cortarà en angulos rectos: densе F B, F D.

Demonstracion. En los triangulos F B E, F D E, los lados F B, F D, son iguales (*d.15. l.1.*) como B E, D E, por construcion, y F E, les es comun: siguese que dichos triangulos seràn iguales en todo ser (*8. l.1.*) y assi lo seràn sus angulos en E, y por consequencia rectos. (*d.10. l.1.*)

En segundo caso, digo que si la A C, cortò la B D, en angulos rectos, que la dividirà por mitad.

Demonstracion. Porque en el triangulo isosceles F B D, sus angulos en B, y en D, son igua-

iguales (*5. l. 1.*) como tambien los angulos en E, de los triangulos F B E, F D E, por suposicion; y los lados F B, F D, de estos triangulos dados por iguales: lo seràn entre si los triangulos, y la B E, igual à E D (*26. l. 1.*) que es lo que se devia demonstrar.

Este segundo caso se puede demonstrar por la (*47. l. 1.*) por que quitando el quadrado de F E, tanto de el quadrado de F B, como de F D, que son iguales; quedaràn los quadrados de B E, D E, iguales.

COROLARIO.

De esta demonstracion se infiere que si sobre la linea desigual de un triangulo isoceles cae una perpendicular de su angulo opuesto, que la dividirà por mitad: y si la divide por mitad formarà con ella angulos rectos. Y lo mismo sucederà si dicha perpendicular cae sobre un lado de un equilatero.

THEOREMA PROPOSICION IV.

Si dos rectas, cuyos dos extremos de una, y otra tocan la circumferencia de un circulo, se cortaren fuera del centro; no serà en dos partes iguales cada una.

Si las lineas A C, B D (*fig. 4.*) se cortan en un punto fuera de el centro como I; digo que no serà una, y otra en partes iguales. Primeramente, si una de ellas passare por el centro; es evidente por la 3. que no se dividirà igualmente; si no es, por el. Pero si ni una ni otra passare por el centro como BD, EF, dese la AC, que pase por el centro.

Demonstracion. Si la linea AC, divide la BD, en dos igualmente en el punto I; los angulos que estas forman en I, seràn rectos (3.) y assi mismo si la EF, estuviere dividida por igual en I, el angulo AIE, fuera recto; y AIB, se ha dicho ser recto, con que la parte seria igual à su todo, lo que implica: y en conclusion la AC, que pasa por el centro fuera perpendicular à BD, y EI, si una y otra estuvieran divididas por mitad: que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion V.

Los circulos que se cortan uno à otro, no tienen un mesmo centro.

Sean propuestos los circulos ABC, ADC (*fig. 5.*) que se cortan en A, y C; digo, que no tendràn un mismo centro; y si se dijese que si, y que lo es E: tirense AE, BE.

Demonstracion. Si tuviessen un mismo centro

tro como E, las lineas E A, E D, ſerian iguales *(d. 15. l. 1.)* como tambien E D, E B; lo que es impoſſible ſiendo la una parte de la otra. Luego no pueden tener un miſmo centro, que es lo que ſe devia demonſtrar.

THEOREMA PROPOSICION VI.

Los circulos que ſe tocan por adentro, no tienen un miſmo centro.

Sean propueſtos los circulos B D, B C *(fig. 6.)* que ſe toquen por adentro en el punto B, digo que no tendràn un miſmo centro, y queriendo que le tengan, y que ſea A, tirenſe A B, A C.

Demonſtracion. Si el punto A, fuera el centro de los dos; las lineas A B, A C, y A B, A D, ſerian iguales *(d. 15. l. 1.)* y la A D, lo ſeria tambien de A C, lo que no es dable ſiendo la una parte de la otra. Luego no tienen un miſmo centro: que es lo que ſe devia demonſtrar.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION VII.

Si dentro de un circulo se toma un punto, que no sea el centro, y de el se tiran lineas à la circumferencia: la que pasarè por el centro serà la mayor de todas; y lo restante de ella la menor; y la mas proxima, de la que pasare por el centro, serà mayor que la mas apartada: y de el tal punto no se podràn tirar mas que dos iguales.

Sea en la figura 7. el punto A (que no sea el centro B,) y de el tiradas las lineas, que se quisieren à la circumferencia haziendo que DC, sea diametro. Digo que la parte AC, serà la mayor de ellas: por exemplo que AF, tirese la FB.

Demonstracion. En el triangulo AFB, los lados AB, BF, juntos son mayores que el tercero AF (*20. l. 1.*) y BF, BC, son iguales (*d. 15. l. 1.*) luego AB, BF, quiero decir AC, serà mayor que AF.

En segundo caso digo, que la parte AD, serà la menor: exemplo menor que AE, dese la EB.

Demonstracion. En el triangulo ABE, los

lados

lados A E, A B, juntos son mayores que E B, *(20. l. 1.)* ò que su igual B D; siguese que quitando el comun A B, quedarà A E, mayor que A D *(a. 5.)*

En tercer caso digo, que A F, mas proxima de A C, que la A E, serà mayor que esta, que està mas apartada.

Demonstracion. Porque en los triangulos A B F, A E B, los lados B F, B E, son iguales, y A B, comun; el angulo F B A, serà mayor que su parte E B A: luego el lado A F, serà mayor que A E *(24. l. 1.)*

Digo ultimamente que de A, no se podràn tirar mas que dos lineas iguales à la circumferencia: hagase el angulo G B A, igual à E B A, *(23. l. 1.)* y dense B G, G A.

Demonstracion. Siendo en los triangulos A B G, E B A, sus angulos en B, iguales (por construcion) el lado A B, comun, y los lados E B, G B, iguales (*d. 15. l. 1.*) los triangulos lo seràn en todo ser (*4. l. 1.*) y por consequencia A G, igual à A E: de manera que otra qualquiera que de el punto A, se tirare à la circumferencia, serà mayor ò menor que una de estas: que es lo que se devia demonstrar.

THEO-

Theorema Proposicion VIII.

Si de un punto fuera del circulo ſe tiràn lineas rectas à la circumferencia concava. La que paſſare por el centro ſerà la mayor: Y la que mas ſe apartare de eſta la menor; y de las que ſe tiraren à la circumferencia convexa: la que formare linea recta con el diametro, ſerà la menor: y la mayor la que mas ſe apatare de ella. Y de el tal punto no ſe podràn tirar mas que dos iguales, à la concava ò convexa.

Sea en la (*fig. 8.*) el punto fuera del circulo A, y de el tiradas las lineas que ſe quiſieren à la circumferencia concava haciendo que la A C, paſſe por el centro B; digo, que eſta ſerà la mayor, por exemplo major que A D, deſe la B D.

Demonſtracion. En el triangulo A B D, los lados A B, B D, ſon mayores que A D (*20. l. 1.*) y B D, es igual de B C (*d. 15. l. 1.*) de que ſe infiere que ſi ſe toma eſta en ſu lugar; toda la A C, ſerà tambien mayor que A D.

Para el ſegundo caſo, eſtè la A E, mas apartada de A C, que paſa por el centro, que la A D, AD; digo, que serà menor que esta: dese la BE.

Demonstracion. En los triangulos ABD, ABE, los lados BE, BD, son iguales, como el lado AB, comun; y siendo el angulo ABD, mayor que el angulo ABE, por ser este parte de aquel, se sigue que el lado AD, serà mayor que AE *(24. l. 1.)* y por consequencia este menor que el otro.

En tercer caso digo, que AF, que està tirada à la circumferencia convexa, y en linea recta, con el diametro, que serà menor que otra qualquiera tirada à dicha circumferencia, como menor que AI, dese la BI.

Demonstracion. En el triangulo ABI, los lados AI, BI, son mayores que AB *(20. l. 1.)* y quitando las partes BI, BF, que son iguales; quedarà AF, menor que AI *(a. 5.)*

En quarto lugar digo, que estando AK, mas apartada de AF, que AI, que serà mayor que esta: tirese BK.

Demonstracion. Porque en los triangulos AKB, AIB, son los lados AK, KB, mayores que AI, IB *(21. l. 1.)* si se quitan los iguales BK, BI, quedarà AK, mayor que AI *(a. 5.)*

Digo ultimamente, que no se podràn de el punto A, tirar mas de dos lineas iguales, sea à la circumferencia concava ò à la convexa, haga-

hagase el angulo A B L, igual de A B K, *(23. l. 1.)*

Demonstracion. Los triangulos A K B, A L B, tienen los lados B K, B L, iguales, el lado A B, comun, y sus angulos en B, iguales (por construcion) luego las lineas A K, A L, seràn iguales (*4. l. 1.*) y no se podrà de A, tirar otra linea à otro punto, que no sea mayor ò menor que una de ellas: y lo mesmo se demonstrarà de las que se tiraren à la circumferencia concava.

Theorema Proposicion IX.

Si de un punto tomado dentro de un circulo se tiraren mas de dos lineas iguales à la circumferencia, este punto serà el centro.

Este Theorema no necessita de otra demonstracion, que la dada en la septima, donde se demonstrò que de un punto dentro de el circulo, no se pueden tirar à su circumferencia mas de dos lineas rectas iguales, si no es que sea el centro.

Theo-

THEOREMA PROPOSICION X.

Dos circulos no ſe cortan mas que en dos puntos.

Sean propueſtos los circulos *(de la fig. 9.)* digo que no ſe cortaràn mas que en dos puntos, y ſi fuere poſſible, que ſe corten en mas, como en A B D, halleſele por la primera al circulo A E B D, el centro C; y denſe A C, B C, y D C.

Demonſtracion. Las lineas A C, B C, D C, tiradas del centro C, à la circumferencia del circulo A E B D, ſon iguales *(d. 15. l. 1.)* y por la meſma lo ſerian tiradas à la circumferencia del circulo A B F D *(* luego por la *9.)* el punto C, ſeria el centro de uno, y otro: conque dos circulos que ſe cortan le tendrian comun, lo que ſe opone à la 5. y aſſi dos circulos no ſe cortan mas que en dos puntos: que es lo que ſe devia demonſtrar.

THEO-

Theorema Proposicion XI.

Si dos circulos se tocan por adentro, la recta que pasare por los centros prolongada, pasarà por el tocamiento.

Sean los circulos *(de la fig. 10.)* que se toquen en C, y que por sus centros A B, se dio una recta prolongada hasta tocar con sus extremos, la circumferencia del circulo mayor. Digo que passarà por el tocamiento C: y si esto no fuere, passarà por otra parte como por G; y en tal caso se darà la B G.

Demonstracion. Porque se quiere que D B G, sea una linea recta, que pasando por los centros toque con sus extremos la circumferencia del mayor circulo, serà esta su diametro *(d. 17. l. 1.)* y por consequencia igual à D C: luego si se quita la parte comun D B, quedaràn B C, y B G, iguales *(a. 3.)* pero E B, es igual à B C *(d. 15. l. 1.)* siguese que lo seria tambien de B G, y la parte igual al todo implica. Conque la recta D C, no passa fuera del contacto C; que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XII.

Si dos circulos se tocan por afuera, la recta que se tirare del centro de el uno al centro de el otro, passarà por el contacto.

Sean los circulos (*de la fig. 11.*) que se tocan en C, digo que la recta tirada del centro A, al centro B, passarà por el contacto: y si esto no fuese assi, passarà por algun blanco dentro las dos circumferencias, exemplo por el punto D. Dense A D, B D.

Demonstracion. Por que A D B, se quiere que sea la recta que va de centro à centro serà igual à A B, tirada à ellos; pero en el triangulo A D B, los lados A B, D B, son mayores que el solo A B (*20. l. 1.*) pues mayores y iguales implica luego la recta A B, no passa fuera del contacto C, que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XIII.

Dos circulos se tocan solamente en un punto.

Sean en primer caso los circulos (*de la fig. 12.*) que se toquen por adentro en C, digo que

I serà

ſerà en un punto ſolamente: y ſi fueſe en otro mas, como en G. Deſe por los centros A, B, una recta que prolongada paſſarà por el contacto (*11.*) y A G, B G.

Demonſtracion. Las lineas B G, B C, tiradas del centro de el circulo menor, ſon iguales (*d. 15. l. 1.*) y añadiendolas la A B, la A G, ſerà igual à A B G (*a. 2.*) pero A C, A G, tiradas del centro de el circulo mayor, ſon tambien iguales; luego en el triangulo A B G, los lados A B, B G, ſerian iguales al lado A G, y eſto ſe opone (*à la 20. l. 1.*) con que es manifieſto, que dos circulos que ſe tocan por adentro ſerà ſolo en un punto.

En ſegundo caſo digo; que ſi los circulos ſe tocan por afuera (como hazen en la *fig. 13.*) que tambien ſerà en un punto, tireſe de centro à centro la A B, que (por la 12.) paſarà por el contacto C, que ſerà el punto; y ſi paſaſe por otro mas, como por D, denſe A D, B D.

Demonſtracion. Los dos ſemidiametros A C, B C, ſon iguales à los dos A D, B D, de que ſe ſigue que en el triangulo A D B, la recta A B, ſerà igual à los lados A D, B D; y eſto ſe opone à la (*20. l. 1.*) conque dos circulos que ſe tocan, &c.

THEO-

Theorema Proposicion XIV.

Las rectas iguales cuyos extremos tocan la circumferencia de un circulo, distan igualmente del centro: y si distaren igualmente del centro las rectas seràn iguales.

Sean propueſtas (*en la fig. 14.*) las iguales A B, C D, digo, que las perpendiculares E F, E G, tiradas del centro à ellas, ſeràn iguales. Denſe A E, C E.

Demonſtracion. Porque en los triangulos A E F, C E G, ſus angulos en F, y en G, ſon rectos (por conſtrucion) ſe dividiràn las propueſtas, en eſtos puntos, por mitad (*3.*) y aſſi F A, G C, ſeràn iguales (*a. 6.*) y A E, C E, lo ſon entre ſi (*d. 15. l. 1.*) y (por la 47. del primero) los quadrados de A F, E F, ſon iguales al quadrado de A E, como los quadrados de C G, E G; à el de E C, y los quadrados de A E, A F, ſon iguales à los quadrados de E C, G C: luego quitando eſtos quadrados iguales, de los todos, lo quedaràn los de F E, G E (*a 3.*) y por conſequencia lo ſeràn ſus lados F E, G E, como ſe ha propueſto.

En ſegundo caſo digo; que ſiendo las diſtancias E F, E G, iguales las propueſtas lo ſeràn entre ſi.

Demonstracion. Porque en los dichos triangulos los lados E F, E G, se han supuesto iguales, y tienen sus angulos en F, y en G, rectos; sus quadrados quitados de los iguales A E, C E, quedaràn (por la citada) iguales. Los quadrados A F, C G; de que se infiere, que sus lados lo seràn: y estos son mitades de las propuestas. Conque ellas lo seràn entre si, que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XV.

De las rectas, cuyos extremos tocan la circumferencia de un circulo; el diametro es la mayor, y la mas proxima al centro, mayor que la mas apartada.

Sea (*en la fig. 15.*) el diametro A B. Digo en primer caso, que serà la mayor de las rectas que sin pasar por el centro se tiraren por exemplo mayor que C D. Dense E C, E D.

Demonstracion. En el triangulo E D C, los lados E C, E D, son mayores que C D, (*20. l. 1.*) pero A E, E B, son iguales à E D, E C (*d. 15. l. 1.*) siguese que toda la A B; serà tambien mayor de C D.

En segundo caso digo, que C D, mas proxima del centro que G I, serà mayor que esta. Dense las lineas E G, E I.

De-

Demonstracion. Los triangulos C E D, G E I, tienen dos lados iguales à dos lados, que son los semidiametros, y de sus angulos en E, D E C, es el mayor por ser el otro su parte, luego tambien el lado C D, serà mayor que G I *(24. l. 1.)*

Theorema Proposicion XVI.

Si de la extremidad de un diametro se levanta una perpendicular, tocarà esta alli el circulo, quedando toda fuera de el; y entre ella, y la circumferencia, otra qualquiera recta que se tirare, prolongada, entrarà en el circulo: el angulo del medio circulo, es mayor que qualquiera agudo rectilinco, y el restante el menor.

Sea *(en la fig. 16.)* levantada en el extremo del diametro, interminada la perpendicular AC *(11. l. 1.)* digo que toda ella estarà fuera del circulo, y que solo le toca en el punto A: dese del centro la D C, à qualquier punto de la perpendicular.

Demonstracion. En el triangulo D A C, su angulo en A, es recto *(por construcion)* y assi en C, serà agudo *(c. 32. l. 1.)* conque el lado

DC, ferà mayor que DA *(19. l. 1.)* y por consequencia el punto C, eftarà fuera de la circumferencia; y lo mefmo fe demonftrarà de otro qualquiera que fe eligiere en la perpendicular fuera del punto A.

En fegundo lugar digo; que, fi entre la circumferencia, y la perpendicular, fe tira una recta como EA; que efta cortarà el circulo, y entrarà en el. Defe del centro la perpendicular DI *(12. l. 1.)*

Demonftracion. Siendo en el triangulo ADI, el angulo en I, recto; ferà el de A, agudo; y por confequencia el lado DA, mayor que DI: luego efte no llegarà à la circumferencia, de que fe infiere que la AE, eftarà dentro del circulo.

El tercer cafo eftà demonftrado por los antecedentes; fupuefto que entre la circumferencia y la perpendicular, no fe puede tirar ninguna recta; y affi aquel angulo es menor que ningun rectilineo agudo, y el que efta formado del diametro y dicha circumferencia, que es el del medio circulo, ferà el mayor: que es lo que, &c.

COROLARIO.

Defta demonftracion confta con evidencia, que fi del extremo de un diametro fe levanta una

una perpendicular, que esta tocarà el circulo en dicho extremo.

PROBLEMA PROPOSICION XVII.

De un punto dado fuera de un circulo, tirar à el una tanjente.

Sea el circulo *(de la fig. 17.)* y el punto A, fuera de el. Dese al centro la recta A C, que cortarà la circumferencia, en B; de cuyo termino, se levantarà à la recta, la perpendicular B E, interminada *(11. l. 1.)* y del intervalo C A, y centro C, se descrivirà una porcion de circulo, que corte la perpendicular en E; y de este punto, se tirarà la C E, y adonde cortare la circumferencia, se darà la A D; que es la tanjente que se pide.

Demonstracion. Los triangulos A D C, E B C, tienen los lados C D, y C A, iguales à los lados C B, C E *(d. 15. l. 1.)* y el angulo en C, comun: luego *(por la 4. l. 1.)* los triangulos seràn iguales en todo ser; y por consequencia lo seràn sus angulos en D, y en B: y este es recto por construcion; siguese que lo serà el formado en D; y la A D, tanjente *(16.)* que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XVIII.

Si de el centro de un circulo, se tira una recta à su circumferencia, al punto que otra recta le toca; serà perpendicular à ella.

THEOREMA PROPOSICION XIX.

Si à la tanjente de un circulo, se levanta una perpendicular del punto del contacto; pasarà por el centro.

Esta proposicion, y la antecedente constan de la 16. razon por que obmito aqui sus demonstraciones.

THEOREMA PROPOSICION XX.

El angulo de el centro de un circulo, es duplo de el de la circumferencia, quando tienen un mesmo arco por basa.

Sea *(en la fig. 18.)* el angulo del centro A B C; digo, que serà duplo, del de la circumferencia A D C, que tiene el mesmo arco A C, por basa.

Demonstracion. Porque el triangulo B C D, tiene

tiene los lados B C, B D, iguales *(d.15.l.1.)* tendrà sus angulos en C, y en D, iguales *(5.l.1.)* y assi el angulo A B C, por externo de dicho triangulo, serà igual à los dos internos en D, y en C *(32.l.1.)* luego duplo de qualquiera dellos.

Digo en segundo caso; que si el angulo de la circumferencia, es como B A D *(de la fig. 19.)* que las lineas que le forman, no pasan por el centro, que serà lo mesmo; quiero dezir, que el angulo del centro B I D, serà su duplo: dese por el centro la A C.

Demonstracion. Por lo demonstrado el angulo del centro B I C, es duplo del de la circumferencia B A C; como tambien C I D, duplo de C A D; y assi el total B I D, serà duplo de B A D, que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XXI.

Los angulos en la circumferencia de una mesma seccion, ò con un mesmo arco por basa, son iguales.

Sean *(en la fig. 20.)* los angulos C D B, C A B, que estan en un mesmo segmento C D A B, mayor que el medio circulo, con un mesmo arco por basa B C; digo, que seràn

ràn iguales: denſe del centro I, la B I, y I C.

Demonſtracion. Porque qualquiera de los angulos en D, y en A, es mitad de el del centro C I B (*20.*) ſeràn ellos iguales entre ſi (*a. 7.*)

Digo en ſegundo lugar; que ſi los angulos C A B, C D B (*de la fig. 1. eſtampa 5.*) eſtan en un ſegmento menor que medio circulo, que ſeràn tambien iguales, deſe la A D.

Demonſtracion. Porque en los triangulos A E B, D E C, los angulos en B, y en C, eſtàn en una meſma porcion con el arco A D, por baſa; ſeràn iguales por el caſo antecedente; y tambien lo ſon ſus angulos en E (*15. l. 1.*) luego lo ſeràn en A, y en D (*32. l. 1.*) que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XXII.

Las figuras quadrilateras, cuyos angulos tocan la circumferencia de un circulo; tienen ſus angulos opueſtos iguales à dos rectos.

Sea (*en la fig. 2.*) el quadrilatero A B: digo que ſus angulos opueſtos ſon iguales à dos rectos: denſe D C, A B.

Demonſtracion. Porque en el triangulo B C D, ſus

ſus tres angulos ſon iguales à dos rectos *(32.l.1.)* y el angulo BDC, es igual de BAC; por eſtar en un meſmo ſegmento *(21.)* y por la meſma lo es el angulo BAD, de BCD; ſe ſigue que el total en A, ſerà igual à los dos BDC, BCD, y tomando en lugar de eſtos los totales en A, y en B; ſeràn iguales à dos rectos: y lo meſmo ſe demonſtrarà de los otros dos opueſtos. Luego las figuras quadrilateras, &c.

Theorema Proposicion XXIII.

Si dos ſegmentos de circulo fueren ſemejantes, y deſcriptos ſobre una meſma linea, ſeràn iguales.

Sean los ſegmentos E, y ACB *(de la fig. 3.)* que ſean ſemejantes (quiero dezir que tengan angulos iguales) digo que pueſto el uno ſobre el otro, como recta con recta, y arco con arco, que ſe ajuſtaràn ſin excederſe en nada: y ſi eſto no fuere aſſi, y ſe excedieren como hazen ADB, ACB; tirenſe ADC, BD, y BC.

Demonſtracion. El angulo ADB, por externo reſpecto el triangulo DBC, ſerà mayor que el interno ACB *(16.l.1.)* y por conſequencia los ſegmentos ACB, ADB, tendràn angulos deſemejantes; y eſto es contra el ſupueſto. Luego ſi dos ſegmentos, &c.

Theo-

Theorema Proposicion XXIV.

Semejantes ſegmentos de circulos deſcritos ſobre iguales lineas, ſon iguales.

Eſta conſta de la precedente, y aſſi eſcuſo ſu demonſtracion.

Problema Proposicion XXV.

Acabar un circulo dada una porcion de el.

Sea la porcion A B C (*de la fig. 4.*) à qualquier punto de la circumferencia, y ſea à B: denſe las rectas A B, C B; y divididas por mitad en D, y en E (*10. l. 1.*) ſe levantaràn de eſtos puntos perpendiculares (*11. l. 1.*) haſta que ſe corten en I: digo, que eſte ſerà el centro: de donde con el intervalo A I, ſe acabarà el circulo.

Demonſtracion. (Por el *c. de la 1.*) el centro deve eſtar en la linea E I, y por el meſmo en la D I; eſtas concurren en el punto I: luego les es comun; y por conſequencia dicho punto I, el centro del circulo.

Theo-

Theorema Proposicion XXVI.

Los angulos iguales, en el centro ò la circumferencia de circulos iguales; tienen iguales arcos por basas.

Sean primeramente (*en la fig. 5.*) los angulos del centro en D, y en I, iguales, constituidos en iguales circulos; digo, que los arcos B C, F G, seràn iguales: dense las rectas B C, F G.

Demonstracion. Los triangulos B D C, F I G, tienen sus angulos en D, y en I, iguales, y tambien lo son los lados que los forman (*d. 15. l. 1. y a. 1.*) de que se sigue que lo seràn los triangulos en todo ser (*4. l. 1.*) y siendo las rectas B C, F G, iguales, lo seràn entre si los segmentos descritos sobre ellas (*24.*) y estos añadidos à los triangulos, se haràn dos sectores iguales (*a. 2.*) que puesto uno sobre otro caeràn semidiametros sobre semidiametros, y arco sobre arco, sin excederse en nada (*a. 8.*) luego los arcos opuestos à angulos iguales, lo seràn entre si. Que es lo que se devia demonstrar.

En segundo caso digo, que los angulos de la circumferencia en A, y en E, siendo iguales que lo seràn los arcos B C, F G.

Demonstracion. Los angulos del centro en

D,

SCHOLIO.

De esta Proposicion se infiere que la mayor cuerda sustendrà mayor arco, y al contrario.

Theorema Proposicion XXIX.

En iguales circulos, las rectas que sustienen iguales arcos, son iguales.

La demonstracion de esta Proposicion, se infiere, de la pasada, y assi la excuso.

Problema Proposicion XXX.

Dividir un arco en dos partes iguales.

Sea *(en la fig. 7.)* propuesto el arco AFB; dese la cuerda AB *(y por la 10. l. 1.)* dividase por mitad en E; y accabado el circulo *(por la 25.)* se daràn del centro AC, BC; y por el punto E, la FC; digo, que esta dividirà el arco propuesto, en dos partes iguales en el punto F.

Demonstracion. En los triangulos AEC, BEC, los lados AC, BC; son iguales *(d. 15. l. 1.)* y AE, EB, lo son, por construcion, y EC, comun luego los triangulos seràn feràn iguales entre si *(8. l. 1.)* y por consequencia sus angulos en C: de que se sigue que los arcos que los sustienen FB, y FA, lo feràn tambien *(26.)* que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XXXI.

El angulo en la circumferencia del semicirculo es recto, el que estuviere en un segmento mayor que el semicirculo, serà agudo, y el que en menor, obtuso.

Sea *(en la fig. 8.)* el angulo del semicirculo BAC; digo, que este serà recto: dese la AD.

Demonstracion. En el triangulo ADC, los lados AD, CD, son iguales *(d. 15. l. 1.)* siguese que lo seràn sus angulos en A, y en C *(5. l. 1.)* y estos dos *(por internos)* iguales al angulo ADB *(32. l. 1.)* luego este serà duplo de qualquiera dellos. Y por la mesma via, se demonstrarà como el angulo ADC, es duplo del angulo DAB: y assi los dos angulos en D, seràn duplos de los dos en A; y los dichos en D, son iguales à dos rectos *(13. l. 1.)* infierese de esto, que el total BAC, mitad dellos, serà recto.

En segundo lugar, estè el angulo AEC,

en un ſegmento menor que el ſemicirculo; digo, que ſerà obtuſo.

Demonſtracion. Porque en el quadrilatero BA, EC, ſus angulos opueſtos en B, y en E, ſon iguales à dos rectos *(22.)* y que el angulo en A, del triangulo ABC, ſe ha monſtrado recto; ſe ſigue que el angulo en B, ſerà agudo *(32. l. 1.)* y por conſequencia, ſu opueſto en E, obtuſo.

El tercer caſo ſe infiere de el paſado, reſpeto que el angulo en B, que eſtà en un ſegmento mayor que el ſemicirculo con el arco AC, por baſſa, ſe provo ſer agudo; que era lo que ſe devia demonſtrar.

SCHOLIO.

*Por eſta demonſtracion es manifieſto, que ſi en un triangulo rectangulo, exemplo ABC (*dicha fig.*) el lado BC, opueſto al angulo recto, ſe divide en dos partes iguales en D; y de eſte punto con el intervalo de la una, ſe deſcrive un circulo, que paſarà por el punto A: porque ſi la circumferencia lo incluyera dejandolo dentro, paſando ella por afuera; el ſegmento ſobre BC, fuera mayor que el ſemicirculo: y ſi lo excluyera dejandolo afuera; el ſegmento fuera menor que el ſemicirculo, y en tal caſo la BC, fuera diametro de diverſos circulos, lo que implica (*d. 1.*)*

THEO.

Theorema. Proposicion XXXII.

Si una recta fuere tangente à un circulo, y por el contacto se tira otra que le corte; los angulos que esta hiziere con la tangente, seràn iguales à los de sus segmentos alternos.

Sea primeramente (*en la fig. 9.*) la AC, que toque el circulo en B; y que la BE, le corte pasando por el centro; y que de sus extremos por una y otra parte, se den lineas à un punto de la circumferencia como BD, BF, ED, EF; digo, que el angulo CBE, serà igual al angulo en F, de su segmento alterno, como el angulo ABE, al de su segmento alterno en D.

Demonstracion. Por que la BE, pasa por el centro serà perpendicular à la tanjente (*18.*) y por consequencia, harà con ella en B, angulos rectos, y el circulo estarà dividido en dos semicirculos; y assi los angulos en D, y en F, seràn rectos (*31.*) luego el angulo CBE, que es recto, serà igual al de su segmento alterno en F; y el angulo ABE, al de su alterno en D.

En segundo caso digo; que si la linea que corta el circulo no pasa por el centro, como BD, (*de la fig. 10.*) que se dè BE, que pase, y en el ſegmento BHD, otra qualquiera recta BH, y finalmente HD, DE; digo, que el angulo CBD, ſerà igual al angulo en E, de ſu ſegmento alterno; y el angulo ABD, al ſuyo en H.

Demonſtracion. En el triangulo BDE, ſus tres angulos, ſon iguales à dos rectos (*32. l. 1.*) y el ſolo en D, recto (*31.*) y los dos que haze la tangente en B, con el diametro ſon tambien rectos; de que ſe ſigue, que quitando de una, y otra parte los rectos ABE, BDE, y el comun EBD; quedarà el angulo CBD, igual al angulo en E (*a. 3.*) y por que en el quadrilatero BHDE, ſus angulos opueſtos H, E, ſon iguales à dos rectos (*22.*) como tambien los dos DBC, ABD (*13. l. 1.*) ſi ſe quita de eſtos ultimos el angulo CBD, y de los otros ſu igual en E; quedarà el angulo ABD, igual al angulo en H: que es lo que ſe devia demonſtrar.

Problema Proposicion XXXIII.

Dada una recta, deſcrivir ſobre ella un ſegmento de circulo, capaz de un angulo igual à otro rectilineo dado.

Sea (*en la fig. 11.*) dada la recta AB, y el angulo E: igual, à el, en el extremo A, ſe harà el an-

angulo C A B *(23. l. 1.)* y perpendicular à C A, ſe levantarà interminada la A F *(11. l. 1.)* y aſſi miſmo del termino B, otra perpendicular que la corte en D; y dividiendo la A D, por mitad en F, (*10. l. 1.*) ſe deſcrivirà de eſte punto con el intervalo F A, el circulo A B D; digo, que el ſegmento A D B, es capaz del angulo D, igual al dado E.

Demonſtracion. Siendo en el triangulo A B D, el angulo en B, recto (*por conſtrucion*) eſtarà eſte (*por el eſcolio de la 31.*) en la circumferencia del circulo, al qual ſerà tangente la C A *(19.)* y (*por la 32.*) el angulo en D, ſerà igual al angulo C A B; y eſte lo es (*por conſtrucion*) al angulo E; luego el angulo en D, ſerà tambien igual al dado E (*a. 1.*) Conque havremos deſcrito ſobre una recta un ſegmento, &c.

Problema Proposicion XXXIV.

Dado un circulo, cortar de el un ſegmento capaz de un angulo, igual à otro rectilineo dado.

Sea propueſto el circulo (*de la fig. 12.*) y el angulo E. Allado el centro F (*1.*) ſe darà por el, la A D; y en el extremo A, la perpendicular A C, que ſerà tangente (*16.*) y haziendo el angulo C A B, igual al dado E (*23. l. 1.*)

 ſe

ſe tendrà el ſegmento A D B, capaz de un angulo como D; que en la precedente ſe demonſtrò igual al dado E, que es lo que ſe pretendia hazer.

Theorema Proposicion XXXV.

Si dos rectas ſe cortan en un circulo (tocando con ſus extremos la circumferencia) el rectangulo hecho de las partes de la una, ſerà igual al comprehendido de las partes de la otra.

Primeramente, ſi las lineas ſe cortan en el centro, ſerà en partes iguales *(d. 15. l. 1.)* y aqui es evidente que el rectangulo echo de las partes de la una, ſerà igual à el de las partes de la otra.

En ſegundo lugar digo; que ſi la una A C, *(fig. 13.)* paſare por el centro, y cortare la otra B D, en dos partes iguales en el punto E; que ſerà lo miſmo: deſe la F B.

Demonſtracion. Porque A C, eſtà dividida en partes iguales en F, y deſigual en E; el rectangulo de las partes deſiguales con el quadrado de F E, parte de en medio, ſerà igual al quadrado de F C, quiero decir de F B, ſu igual *(5. l. 2.)* y porque B D, ſe dividio por mitad

mitad en E, formarà alli angulos rectos *(3.)* y assi los quadrados de F E, B E, seràn tambien iguales al quadrado de B F *(47. l. 1.)* luego quitando el quadrado de F E, que les es commun; quedarà el rectangulo de A E, en E C, igual al quadrado de E B, ò al de su igual E D *(4. 3.)* y por consequencia al rectangulo hecho de estas partes iguales.

Digo en tercer caso que si la A B *(fig. 14.)* passando por el centro F, divide la C D, en dos partes desiguales en E; que se dè à esta del centro la perpendicular F G *(12. l. 1.)* que la dividirà igualmente en G *(3.)*

Demonstracion. Siendo A B, dividida igualmente en F, y desigual en E; el rectangulo de sus partes desiguales, con el quadrado de F E; serà igual al quadrado de F B, ò de su igual F C *(5. l. 2.)* y por la misma el rectangulo de C E, en E D, con el quadrado de G E, serà igual al quadrado de C G: à quienes añadiendo el quadrado de F G; se tendrà el rectangulo de C E, en E D, con los quadrados de F G, G E, iguales à los quadrados de C G, G F *(4. 2.)* y si en lugar de los quadrados de F G, G E, se toma el quadrado de F E, que los es igual *(47. l. 1.)* quedarà el rectangulo de C E, en E D, con el quadrado de F E; igual à los quadrados de F G, G C; y estos son iguales al de C F; y hemos provado que este es tambien igual al rectangulo de A E, en E B, con el quadrado de F E; luego quitando el quadrado de F E, por comun; quedarà el rectangulo de A E, en E B, igual al rectangulo de C E, en E D *(a.3.)*

Digo ultimamente, que si las lineas C D, H I, que se cortan en el punto E, ninguna pasa por el centro, que los rectangulos de sus partes seràn tambien iguales; porque tirando la A B, que pase por el centro y el termino E; se harà con la H I, la misma demonstracion que en el caso precedente, y se tendrà el rectangulo de H E, en E I, igual al de A E, en E B; el qual se ha monstrado ser igual al de D E, en E C; conque este lo serà al de H E, en E I, *(a. 1.)* que es lo que se devia demonstrar.

SCHOLIO.

Por esta demonstracion es manifiesto, que si dos rectas que se cortan tubieren iguales, los rectangulos echos de sus partes; que tirando rectas de un extremo à otro, se formarà un quadrilatero, cuyos angulos opuestos seràn iguales à dos rectos; por poderse en tal caso descrivir un circulo que pase por los quatro angulos (22.)

THEO-

THEOREMA PROPOSICION XXXVI.

Si de un punto fuera del circulo se tiran dos rectas; una que le sea tangente, y otra que le corte y toque la circumferencia concava: el quadrado de la tangente, serà igual al rectangulo que se hiziere de toda la secante en su parte de entre el punto, y la circumferencia convexa.

Sea *(en la fig. 15.)* propuesto el punto A, y de el, dada al circulo la tangente AB, y la AC, que le corte; y que en primer lugar pase por el centro E; digo, que el quadrado de la tangente, serà igual al rectangulo echo de toda la secante A C, en su parte AO: dese E B.

Demonstracion. Porque la OC, se dividio igualmente en E; y en derecho se le añadio AO; el rectangulo de toda la AC, en AO, con el quadrado de OE; serà igual al quadrado de AE *(6. l. 2.)* y siendo en el triangulo ABE, su angulo en B, recto *(18.)* los quadrados de AB, BE, seràn tambien iguales al quadrado de AE *(47. l. 1.)* pero EB, es igual de EO *(d. 15. l. 1.)* conque lo seràn sus quadrados, los quales quitados de una y otra par-

parte; quedarà el quadrado de AB, igual al rectangulo de AC, en AO (*a.3.*)

En segundo lugar digo; que si la secante AH, no pasa por el centro E; que se de deste punto la perpendicular EG (*12. l.1.*) que dividirà por mitad la FH (*3.*) y assi mesmo se darà la EF.

Demonstracion. Estando FH, dividida igualmente en G, y añadiendo en derecho la AF; el rectangulo hecho desta parte en toda la AH, con el quadrado de FG; serà igual al quadrado de AG (*6. l.2.*) y añadiendo en una y otra parte el quadrado de EG; se tendràn los quadrados de AG, GE, iguales al rectangulo de AF, en AH, con los quadrados de FG, GE, (*a.2.*) y si en lugar destos ultimos quadrados se toma el quadrado de EF, ò el de su igual EB, que qualquiera les es igual (*47. l.1.*) serà el rectangulo de AF, en AH, con el quadrado de EB, igual à los quadrados de AG, GE; los quales lo son al de AE (*47. l. 1.*) y este se ha provado igual à los de AB, BE: siguese que quitando por comun el quadrado de EB, quedarà el quadrado de AB, igual al rectangulo de AF, en AH (*a.3.*) que es lo que se devia demonstrar.

CO-

COROLARIO. I.

Por lo demonſtrado en eſta propoſicion es evidente; que ſi del punto A, ſe tiran las ſecantes que ſe quiſieren, en la forma referida; que el rectangulo de cada una dellas, en ſu parte exterior, ſerà igúal al quadrado de la tangente: y por conſequencia todos los rectangulos ſeràn iguales entre ſi.

COROLARIO II.

Tambien es manifieſto que ſi del punto A, ſe tira otra tangente, que ſu quadrado ſerà igual al rectangulo de qualquiera ſecante y de ſu parte exterior tirada del miſmo punto: de que ſe infiere que la tangente ſerà igual à la A B; y que del punto A, no ſe tiraràn mas que dos iguales à la circumferencia. Porque ſeria contra la (8.)

SCHOLIO.

Del ſegundo Corolario ſe infiere que ſi de un punto fuera de el circulo ſe tiraren dos rectas iguales à la circumferencia; y la una fuere tangente, que lo ſerà la otra.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION XXXVII.

Si de un punto fuera del circulo se tiraren dos rectas; una à la circumferencia concava, y otra à la circumferencia convexa, y el rectangulo hecho de toda la secante en su parte exterior, fuere igual al quadrado de la terminada en la circumferencia convexa: serà esta tangente del circulo.

La demonstracion de esta Proposicion consta de la precedente, y assi la excuso.

Aqui se termina el tercero libro de Euclides, y siguen algunas Proposiciones del Autor.

PROPOSICION I.

Siendo propuesto un circulo (*como el de la fig. 16.*) y fuera del, el punto A; se pide, que de dicho punto se de al circulo una tangente, sin valerse de la (*17.*)

Respuesta, hallado el centro C (*1.*) *y tirada la* *la A C, se dividirà por mitad en D* (10. l. 1.) *y descrito de este termino, con el intervalo D C, el semicirculo A B C; se darà à la intersecacion B, la A B; digo, que esta serà la tangente que se pide; dese la C B.*

Demonstracion. *Porque en el triangulo A B C, el angulo en B, està en el semicirculo serà recto* (31.) *luego la A B, siendo perpendicular al semidiametro C B, serà tangente del circulo propuesto* (16.) *que es lo que pide la question.*

PROPOSICION II.

Propuesto el circulo (*de la fig. 17.*) y dada à el, indeterminada la tangente AF; se pide, que se tire otra tangente, que forme con la dada un angulo igual al de O.

Respuesta, hallado el centro B (1.) *se darà por A, la B C; y igual al angulo O, se harà el de C A D* (23. l. 1.) *y dividiendo despues el angulo D A B, por mitad con la A E* (9. l. 1.) *se harà el angulo F A G, igual al de D A E; y en el termino G, se formarà otro F G A, igual al de la otra mitad E A B, y assi se cortarà la tangente dada en un punto, como F; digo, que F G, es* *es la tangente que se pide, y que harà el angulo en F, igual al dado O.*

Demonstracion. *Porque del centro B, se diò la B C, por el contacto A; serà perpendicular à la tangente (18) y por consequencia harà con ella dos angulos rectos: y destos se ha quitado el angulo D A C, y de la mitad del restante se ha hecho el angulo F A G; y el angulo en G, igual à la otra mitad: de que se sigue que el triangulo F A G, serà isoceles (6. l. 1.) y siendo sus tres angulos iguales à dos rectos (32. l. 1.) serà el angulo en F, igual à D A C, el qual se ha echo igual al dado O; luego este serà tambien igual al angulo en F, (a. 1.) y la F G, tangente por igual à la A F,* (por la inversa del Corolario 2. de la 36. ò Scholio que le sigue) *que es lo que se ha pedido.*

PROPOSICION III.

Siendo en el triangulo rectangulo (*fig. 18.*) conocidos sus tres lados; se pregunta si del circulo que tiene dentro y los toca se podrà saver el diametro?

Digo que si por el Theorema que dize.

En todo triangulo rectangulo el excesso de los lados que forman el angulo recto en la linea opue-

opuesta à el; es el diametro del circulo. *Dense del centro G, à los contactos GD, GE, GF.*

Demonstracion. *Siendo A D, y A F, tangentes de un mesmo circulo, tiradas del punto A; seràn iguales* (cor. 2. de la 36.) *y por la mesma lo seràn F C, C E, como tambien B E, B D: luego las partes A D, C E, seràn iguales à toda la diagonal A C; y la diferencia desta, à las dos A B, B C, son las iguales B E, B D; las quales juntas hazen el diametro del circulo: porque, siendo los angulos en D, y en E, rectos* (18.) *y en B* (por la suposicion) *tendrà el quadrilatero G B, los lados B E, G D, paralelos* (28. l. 1.) *y (por la mesma) lo seràn G E, B D; pero E B, D B, se han provado iguales: siguese que lo seràn los otros dos, y el angulo en G, recto* (34. l. 1.) *y por consequencia el quadrilatero un quadrado: luego los semidiametros D G, G E, seràn iguales à D B, E B, exceso de A B, C B, en A C; y suponiendo que esta tiene 5. A B, 4. y B C, 3. serà el diametro 2. Conque se tendrà lo que se ha pedido.*

Por este Theorema se pueden proponer y absolver varias questiones; y en particular se puede proponer el dar conocida la diagonal, y el diametro del circulo; y pedir el valor de los otros dos lados.

A esta Proposicion responderà el que supiere este Theo-

Theorema y mi Proposicion (5. l. 2.) *donde se enseña à dividir un numero en dos partes tales, que la suma de sus quadrados haga cierta cantidad; por que saviendo aqui que la suma de lo dado, es igual à los lados que forman el angulo recto; se podrà quadrando la diagonal saver el valor de cada uno, por dicha proposicion.*

PROPOSICION IV.

Siendo propuesto el triangulo A B C (*fig. 19.*) cuya suma de sus tres lados sea conocida, como assi mismo el semidiametro del circulo que por adentro los toca. Se prejunta si se podra saber el area del triangulo?

Digo que si por el siguiente Theorema.

En todo triangulo, el rectangulo hecho de la suma de sus tres lados en el semidiametro del circulo que los tocare por adentro; es duplo del mesmo triangulo.

Dense (en dicha fig.) *del centro las perpendiculares G D, G F, G E, y del mesmo lineas à los angulos.*

Demonstracion. *Porque el rectangulo de A D, en D G, es duplo del triangulo A D G* (41. l. 1.) *y por la mesma el rectangulo de G D, en D B,* *lo* *lo es del triangulo G D B : se sigue que el rectangulo de toda la A B, en G D, serà duplo del triangulo A B G, y de la mesma manera se demonstrerà, que el rectangulo de G E, en B C, es duplo del triangulo B G C; como el rectangulo de G A, en G F, duplo del triangulo A G C; pero G D, G E, y G F, son iguales* (d. 15. l. 1.) *luego el rectangulo hecho de la suma de los tres lados en el semidiametro G D; serà tambien duplo de todo el triangulo A B C. Que es lo que se devia demonstrar.*

Querriendo aora saber el area y siendo en supposicion la suma de los tres lados 48. y el semidiametro $3\frac{1}{2}$: se multiplicarà uno por otro y darà el producto 168. cuya mitad 84. serà el area del triangulo que se pide.

Por esta proposicion se pueden hazer varias questiones, como dar conocido cada lado del triangulo, y pedir el valor del diametro del circulo. La respuesta no la daràn si no buscan primero el area del triangulo, y partiendo despues esta por la mitad de la suma de sus lados; porque el cociente es el semideametro.

OTRA.

Puedese tambien dar conocida el area del triangulo, y el semidiametro, y preguntar por la suma de los lados y assi de otras.

PROPOSICION V.

Siendo propuesto el quadrilatero A B (*fig. 20.*) que el rectangulo de A C, en B C, sea igual al de D C, en C E; y que los angulos totales en B, y en E, sean conocidos: descubrir los angulos totales en D, y en A.

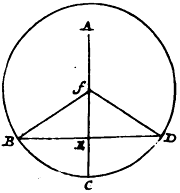
Respuesta; es evidente que, por el Scholio de la 35. se podrà descrivir un circulo que passe por los angulos del quadrilatero y assi hallado el centro F (1.) con el intervalo de F A, se descrivirà el dicho circulo, y en tal caso los angulos opuestos de dicho quadrilatero seràn iguales à dos rectos; (22.) luego la diferencia del angulo en E, à dos rectos, serà el valor del angulo en D; y el complemento del angulo en B, à dos rectos serà el de A; que es lo que pide la question.

Puedese proponer tambien que se den 4. puntos en tal orden, que por ellos pueda passar un circulo.

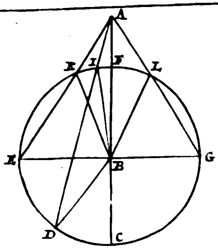
Para responder à esta Proposicion es menester cruzar dos rectas de manera, que el rectãgulo de las partes de la una sea igual à el de las de la otra; y tirando rectas de sus extremos se buscarà el centro, para descrivir el circulo, como en la antecedente, que este passarà por los extremos de las rectas que son los quatro puntos. Y con esto darè fin à estas proposiciones, passando aora à tratar del 4. Libro.

Estampa 4.ª

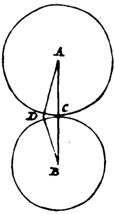
3.



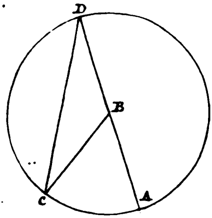
8.



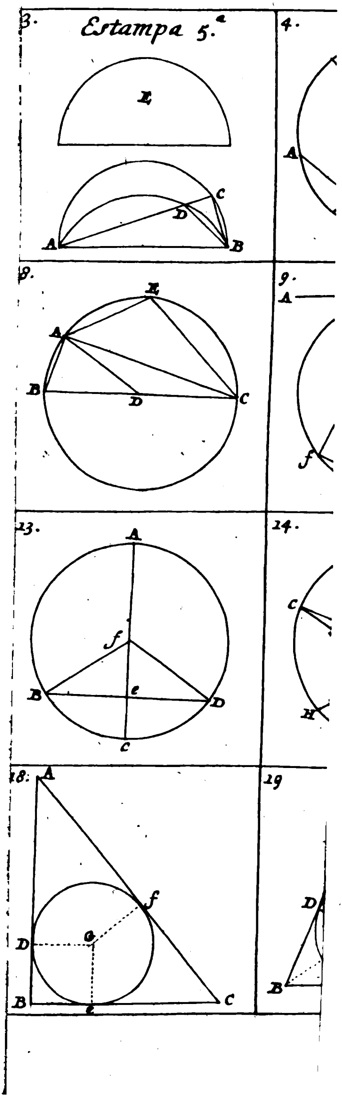
13



18.



Estampa 5.ª



LIBRO QUARTO.

EN este Libro trata Euclides de la inſcripſion y circumſcripſion de todas las figuras regulares, ò poligones dentro, y fuera del circulo; y de unas en otras: y tomaſe de aqui el origen para la formacion de las Tablas Senos, Tangentes, y Secantes, tan neceſſarias para el uſo de la Trigonometria; y medir toda ſuerte de diſtancias.

DEFINICIONES.

1. Figura inſcripta ſe dice à la que eſtando dentro de otra, toca à la de afuera con todos ſus angulos; y ſi la inſcripta es circulo, tocarà con la circumferencia todos ſus lados.

 2. Fi-

2. Figura circumſcripta es, la que eſtà por afuera de ſu inſcripta, que paſſa por todos ſus angulos.

3. Una linea recta ſe dice eſtar acomodada, ò inſcripta en un circulo; quando toca à la circumferencia con ſus extremos.

Problema Proposicion I.

Inſcrivir en un circulo una recta igual à otra dada, ſiendo menor que ſu diametro.

Sea *(en la fig. 1. Eſtampa 6.)* propueſta à inſcrivir en ella una recta igual à CG; digo, que tomando ſu intervalo, y haziendo centro en qualquier extremo del diametro, como en B; ſe deſcrivirà el circulo ED, y ſe darà BD, ò BE, que qualquiera ſerà igual à la dada *(d. 15. l. 1.)* como ſe à pedido.

PROBLEMA PROPOSICION II.

Dado un circulo, inſcrivir en el un triangulo, equi angulo à otro dado.

Sea propueſto el circulo *(de la fig. 1.)* y el triangulo C F G: deſe qualquiera tangente H I (*c. 16. l. 3.*) y en el contacto D, ſe harà el angulo I D B, igual al angulo en F; y el angulo H D A, igual al angulo en G *(23. l. 1.)* y dando la A B, ſe tendrà el triangulo A B D, con cada angulo igual à los del triangulo C F G.

Demonſtracion. El angulo I D B; es igual al de ſu ſegmento alterno en A *(32. l. 3.)* con que eſte ſerà tambien igual al angulo en F *(a. 1.)* y por la meſma demonſtraremos como en el triangulo D B A, ſu angulo en B, es igual al angulo en G; luego el angulo en D, de dicho triangulo, ſerà igual al angulo en C (*32. l. 1.*) y aſſi los tres angulos de un triangulo, ſeràn iguales à los tres del otro, cada uno al ſuyo: que es lo que ſe à querido hazer.

PROBLEMA PROPOSICION III.

Deſcrivir al rededor de un circulo, un triangulo, que ſea equiangulo à otro dado.

Sea propueſto el circulo I G K *(fig. 2.)* y el

 trian-

triangulo ABC; prolongese uno de sus lados BC, y agase el angulo KHI, igual al externo en C; y el angulo GHI, igual al externo en B (23. l. 1.) y por los puntos G, I, K, se daràn las tangentes DE, &c. hasta que concurran, y formen el triangulo DEF, lo que haràn de necessidad; porque siendo los angulos que hazen los semidiametros con las tangentes rectos (18. l. 3.) si de G, à K, se tira una recta, harâ con las tangentes angulos agudos por la parte de arriva, monstrando que dichas tangentes concurriràn en D (a. 11.)

Demonstracion. En el quadrilatero FKHI, se ençierran quatro angulos rectos, respecto que qualquiera de los dos triangulos en que se puede dividir con una recta, como FH, consta de dos rectos (32. l. 1.) pero dichos triangulos tienen sus angulos en K, y en I, rectos; luego los angulos del quadrilatero en H, y en F, seràn iguales à dos rectos, y el angulo KHI, se ha echo igual al angulo externo en C; y por la (13. l. 1.) los dos en C, son iguales à dos rectos: conque el angulo total en F, serà igual al angulo interno en C, del triangulo propuesto. Y por el mesmo camino siendo en el quadrilatero GI, el angulo GHI, igual al externo en B; provaremos que el angulo en E, es igual al interno en B; de que se sigue que el angulo en D, serà igual al al angulo en A (*32. l. 1.*) conque habremos defcrito al rededor de un circulo, un triangulo, &c.

Problema Proposicion IV.

Infcrivir un circulo en un triangulo.

Sea el triangulo (*de la fig. 2.*) dividanfe dos de fus angulos D, y F, por mitad (*9. l. 1.*) con las lineas DH, FH, las quales concurren en el punto H, de donde fe bajaràn à los lados del triangulo perpendiculares (*12. l. 1.*) y con el intervalo de la una HG, y centro H; fe formarà un circulo; digo, que efte tocarà los lados del triangulo propuefto.

Demonftracion. Los triangulos DHK, DHG, tienen los angulos en D, iguales (por conftruccion) y por la mefma en G, y en K; y la DH, es comun; luego los triangulos feràn iguales en todo fer (*26. l. 1.*) y el lado HK, igual à HG, y por la mefma via fe demonftrarà, como en los triangulos en que la FH, divide el quadrilatero KI; tienen los lados KH, HI, iguales, y (*por la 9. l. 3.*) H, ferà el centro del circulo cuya circumferencia tocarà los puntos G, I, K; como fe pretende.

Problema Proposicion V.

Al rededor de un triangulo descrivir un circulo.

Sea el triangulo *(de la fig. 3.)* dividanse sus lados por mitad en A, B, y C, *(10. l. 1.)* y destos puntos levantense perpendiculares *(11. l. 1.)* que *por la 3. del 3.)* estarà en todas el centro D; digo, que si desde el, con el intervalo DF, se descrive un circulo, que passarà por los demas angulos del triangulo Dense de los angulos lineas al centro.

Demonstracion. Porque en los triangulos ADF, ADG, el lado FA, es igual à AG *(por construccion)* como sus angulos rectos en A, y el lado AD, comun; los triangulos seràn iguales en todo ser *(4. l. 1.)* y el lado DG, igual de DF; y por la mesma demonstracion provaremos, que tambien el lado HD, es igual de DF; y por consequencia el circulo descrito del centro D, passarà por los puntos FGH *(9. l. 3.)* como se pretendia.

Theo-

PROBLEMA PROPOSICION VI.

Inscrivir un quadrado dentro de un circulo.

Sea el circulo de la *(fig. 4.)* al qual hallado el centro E *(1. l. 3.)* se cruzaràn por el, en angulos rectos los Diametros AB, CD, y de sus extremos se tiraràn rectas; digo, que el quadrilatero que estas formaràn serà quadrado.

Demonstracion. Todos los angulos en el centro son rectos, por construcion, y los semidiametros iguales *(d. 15. l. 1.)* luego los quatro triangulos de la figura seràn iguales *(4. l. 1.)* y por la igualdad de los semidiametros, seràn todos isoceles, y sus angulos de la circumferencia iguales *(por la 5. l. 1)* y medios rectos *(32. l. 1.)* de que se sigue, que los angulos totales en la circumferencia seràn rectos, y assi el quadrilatero inscrito serà equiangulo, y equilatero, y *(por la d. 30. l. 1.)* serà un quadrado, que es lo que se pretendia hazer.

PROBLEMA PROPOSICION VIII.

Descrivir un quadrado al rededor de un circulo.

Sea propuesto el circulo *(de la fig. 5.)* y por su ſu centro E, cruzados dos diametros en angulos rectos; en cuyos extremos ſe levantaràn perpendiculares azia una y otra parte (*11. l. 1.*) que ellas concurriran (*a. 11.*) formando el quadrado pedido.

Demonſtracion. Porque en los terminos A, y D, ſe levantaron AG, DG, perpendiculares; ſeràn eſtas tangentes (*c. 16. l. 3.*) y iguales (*c. 2. 36. l. 3.*) y tambien lo ſon los ſemidiametros AE, ED (*d. 15. l. 1.*) luego ſiendo en el quadrilatero EG, ſus angulos en E, A, y D, rectos (*por conſtrucion*) ſe ſigue que lo ſerà el formado en G, y por la (*28. l. 1.*) las lineas opueſtas ſon paralelas; y iguales (*33. l. 1.*) y de la meſma manera ſe demonſtrarà que los quadrilateros FE, HE, tienen ſus quatro angulos rectos, y ſus lados iguales: de que ſe infiere que el lado GD, ſerà igual à DH; y GA, igual à AF (*a. 1.*) y aſſi teniendo en el quadrilatero total IG, provados tres angulos rectos; ſe ſigue que lo ſerà el quarto en I, y ſus lados opueſtos iguales y paralelos; y ſiendo los dos GH, GF, monſtrados iguales, ſerà el dicho quadrilatero GI, el quadrado que ſe ha querido circunſcrivir.

PRO-

PROBLEMA PROPOSICION VIII.

Inſcrivir un circulo en un quadrado.

Sea el quadrado de la *(fig. 5.)* dividanſe todos ſus lados por mitad *(10. l. 1.)* y de los terminos de las diviſiones ſe tiraràn A B, C D, que ſe cruzaràn en el punto E; el qual digo, que ſerà el centro, de donde con el intervalo A E, ſe formarà un circulo, cuya circumferencia tocarà los lados del quadrado.

Demonſtracion. Porque en el quadrilatero B G, los lados A G, B H, ſon paralelos entre ſi, y iguales *(por conſtruccion)* los lados G H, A B, lo ſeràn tambien *(33. l. 1.)* y ſiendo los angulos en G, y en H, rectos lo ſeràn en A, y B *(34. l. 1.)* y haziendo el quadrilatero E G; ſe tendràn, los angulos en A, y en G, rectos como en E, y en D; y teniendo dicho quadrilatero el lado A G, igual de G D, y ſus lados opueſtos paralelos, ſu figura ſerà un quadrado *(d. 30. l. 1.)* conque el lado E A, ſerà igual de E D. Y de la meſma manera demonſtraremos, que los otros tres quadrilateros ſon quadrados, y las lineas que concurren en E, iguales entre ſi : luego eſte punto ſerà el centro *(9. l. 3.)* de donde deſcrito el circulo, con el intervalo A E; tocò todos los lados del quadrado como ſe pretendia.

PRO-

PROBLEMA PROPOSICION IX.

Descrivir un circulo al rededor de un quadrado.

Sea propuesto el quadrado (*de la fig. 4.*) dense de sus angulos opuestos diagonales, que se cruzen en E; digo, que, este punto serà el centro de donde con el intervalo AE, descrito el circulo, pasarà por todos los angulos del quadrado.

Demonstracion. En el triangulo ACB, siendo su angulo en C, recto, y los lados que le forman iguales; sus angulos en A, y en B, seràn iguales (*5. l. 1.*) y por la mesma via, demonstraremos, como todos los angulos del quadrado estàn divididos por mitad; de que se sigue que el triangulo ACE, tendrà sus lados AE, CE, iguales (*6. l. 1.*) como el triangulo AED, los lados AE, ED; y lo mesmo se demonstrarà de la EB: conque el punto E, serà el centro (*9. l. 3.*) y assi el circulo que se formò de el, toca los angulos del quadrado, como se ha pedido.

PRO-

PROBLEMA PROPOSICION X.

Descrivir un triangulo isoceles, que los angulos iguales, sean duplos del tercero.

Sea propuesta la linea A B *(fig.6.)* que sea uno de los dos lados iguales del triangulo que ayga de ser: con cuyo intervalo y centro A, se descrivirà el circulo B D; y dividiendo la propuesta de suerte, que el quadrado de A C, sea igual al rectangulo de B C, en A B *(11. l. 2.)* se acomodarà la A C, à la circumferencia, como de B, à D, *(1)* y dando la B D, y D A; se tendrà el triangulo A B D, cuyo lado A D, serà igual de A B; y los angulos en B, y D, duplos del angulo en A. Dese la C D, y al rededor del triangulo A C D, descrivase un circulo *(5.)*

Demonstracion. Porque el quadrado de A C, ò de su igual B D, es igual al rectangulo de A B, en la parte exterior B C; tocarà la B D, el circulo A C D, en D *(37. l. 3.)* y assi el angulo B D C, serà igual al de su segmento alterno en A *(32. l. 3.)* pero el angulo B C D, por externo del triangulo A C D, es igual à los dos internos en A, y D *(32. l. 1.)* conque tomando el angulo B D C, en lugar de su igual en A; el total en D, serà igual al dicho

ex-

externo en C; y siendo en el triangulo A B D, sus lados A B, A D, iguales *(d. 15. l. 1.)* lo seràn sus angulos en D, y en B *(5. l. 1.)* luego tambien el angulo B C D, serà iguàl al angulo en B *(a. 1.)* y por consequencia el triangulo B C D, isoceles; de que se sigue, que siendo el lado B D, igual à A C, por construcion: serà D C, igual de A C *(a. 1.)* y el triangulo A C D, isoceles, como sus angulos en A, y en D, iguales; y assi el total en D, serà duplo del angulo en A, y lo mesmo serà el angulo en B, que es lo que se pretendia hazer.

COROLARIO.

Por esta demonstracion es manifiesto, que el triangulo isoceles A B C, teniendo sus angulos iguales à dos rectos, serà el de A, quinto de dos rectos, ò decimo de un recto, y cada uno de los otros, dos quintos de dos rectos.

Problema Proposicion XI.

Inscrivir un pentagono regular en un circulo.

Sea el circulo de la *(fig. 7.)* descrivase por la precedente el triangulo isoceles I, que tenga los

los angulos iguales duplo del tercero; y equiangulo à el, inscrivase el triangulo D E F (*2.*) y dividiendo por mitad sus angulos en E, y en F (*9. l. 1.*) con las lineas E G, F H; se daràn H D, D G, &c. y se tendrà inscrito el pentagono regular.

Demonstracion. Los angulos D E F, D F E, estàn (*por construcion*) divididos por mitad con las lineas E G, F H; y siendo cada uno dellos duplo del angulo E D F, serà igual à este, cada una de aquellas mitades (*a. 1.*) y assi los cinco arcos que sustienen estos angulos seràn iguales (*26. l. 3.*) luego tambien estos arcos tendràn sus cuerdas iguales (*29. l. 3.*) pero los angulos totales en G, y en F, estando sustenidos de tres destas cuerdas iguales; lo seràn ellos entre si; y lo mesmo se demonstrerà en lo demas: conque se habrà inscrito el pentagono regular, que se ha pedido.

COROLARIO.

Por esta demonstracion es manifiesto que el angulo del pentagono regular, contiene los tres quintos de dos rectos, ò 6. quintos de un recto.

Problema Proposicion XII.

Al rededor de un circulo, descrivir un Pentagono Regular.

Sea el circulo de la (*fig. 8.*) inscrivase en el por la antecedente un pentagono regular; y dense del centro los semidiametros A F, &c. y por sus extremos perpendiculares, à una y otra parte (*11. l. 1.*) que estas concurriràn unas con otras (*a. 11.*) en los terminos G, y H, &c. formando el Pentagono regular Dense del centro las rectas F G, F H, &c.

Demonstracion. (*Por el c. de la 16. l. 3.*) A G, G E, seràn tangentes y iguales (*c. 2. 36. l. 3.*) y los triangulos F G A, F G E, tendràn los lados F A, A G, iguales à los lados F E, E G; cada uno al suyo; y F G, comun; de que se sigue que seràn iguales en todo ser (*8. l. 1.*) conque sus angulos en G, seràn iguales, como assi mesmo en F; y assi el angulo del centro A F E, estarà dividido por mitad: y por el mesmo camino demonstraremos, como la F H, divide tambien el angulo del centro E F D, por mitad; y siendo dichos angulos del centro iguales entre si, lo seràn sus mitades G F E, E F H (*a. 7.*) conque los triangulos G F E, E F H, tendràn sus angulos

en

en F, iguales: y en E, lo son (por constrúcion) como la EF, comun; de que se sigue, que los triangulos seràn iguales en todo ser (*26. l. 1.*) y el lado GE, igual de EH, como sus àngulos en G, y en H; y proseguiendo assi, se proverà como el angulo total en H, es igual al total en G; y todos sus demas semejantes entre si; y tambien se demonstrarà, como GH, es igual à GI; y en conclusion que el pentagono circumscrito es equiangulo y equilatero; y por consequencia regular, como se ha pedido.

Problema Proposicion XIII.

Inscrivir un circulo en un pentagono regular.

Sea propuesto el pentagono (*de la fig. 9.*) dividanse los angulos A, y B, por mitad (*9. l. 1.*) con las lineas AF, BF, las quales concourriràn en F; y haviendo dividido los lados del pentagono por mitad, se tiraràn de los puntos de sus divisiones rectas al termino F, del qual con el intervalo de la una GF, se formarà un circulo: digo, que este estarà inscrito en el pentagono.

Demonstracion. En el triangulo ABF, sus angulos en A, y en B, siendo mitades de angulos iguales lo seràn ellos entre si *(a. 7.)* y el triangulo isoceles *(6. l. 1.)* luego los triangulos B F G, A G F, teniendo los lados B F, B G, iguales à los lados A F, A G, cada uno al suyo, como sus angulos en A, y en B; seràn iguales en todo ser *(4. l. 1.)* y por la mesma lo serà el triangulo H B F, de B F G, como G F A, de A F I, de que se sigue que los tres lados G F, H F, I F, seràn iguales entre si *(a. 1.)* y lo mesmo los demas, y el termino F, centro del circulo *(9. l. 3.)* que tocarà los lados del pentagono, como se ha pedido.

PROBLEMA PROPOSICION XIV.

Descrivir un circulo, al rededor de un pentagono regular.

Sea el pentagono *(de la fig. 10.)* dividanse sus lados por mitad *(10. l. 1.)* y de los terminos de las divisiones G, H, se levantaràn perpendiculares *(11. l. 1.)* que concurràn en un punto, como F; digo, que este serà el centro: dense à este termino rectas de los angulos del pentagono y de la division I, la F I.

Demonstracion. Porque en los triangulos B F G, A G F, la G F, es comun y la A G, igual à B G *(por construcion)* como sus angu-

gu-

gulos en G, rectos los triangulos seràn iguales en todo ser *(4. l. 1)* y la A F, igual à B F; y de la mesma manera se demonstràrà que la F E, es igual à qualquiera destas y el termino F, el centro *(9. l. 3.)* de donde con el intervalo de la una, se descrivirà el circulo pedido.

Problema Proposicion XV.

Inscrivir un exagono regular en un circulo.

Sea el circulo, de la *(fig. 11.)* hallado el centro G *(1. l. 3.)* y dada por el la A D, se descrivirà con el intervalo G D, y centro D, el circulo C G E, y se daràn C F, B E; y finalmente las cuerdas C D, D E, B C, &c. Digo, que estas formaràn el exagono inscrito.

Demonstracion. Los triangulos C G D, G D E, tienen todos sus lados iguales *(d. 15. l. 1.)* de que se sigue que seràn equilateros: y iguales *(8. l. 1.)* y assi *(por el c. 32. l. 1.)* cada uno de sus angulos en G, serà el tercio de dos rectos; y siendoles sus opuestos en el centro iguales *(15. l. 1.)* los triangulos A B G, A G F, seràn iguales entre si *(4. l. 1.)* y estos à los otros, y porque la E G, cayò sobre C F, harà con ella dos angulos iguales à dos rectos *(13. l. 1.)* y siendo C G E, los dos tercios de dos rectos serà E G F, de un tercio como su opuesto en el centro; de que se sigue que los seis formados en dicho centro, seràn todos iguales; y por consequencia todos los triangulos: luego las cuerdas D C, CB, &c. seràn iguales, y la figura inscrita un exagono regular, porque cada uno de sus angulos consta de los dos tercios de dos rectos: conque havremos inscrito, &c.

COROLARIO.

Consta desta demonstracion, como el semidiametro del exagono, es igual al lado del Poligon.

Nota. Que hasta aora nadie à demonstrado Geometricamente el Problema, que pide la Descripcion de el Eptagono regular, y de otras figuras de lados impares: lo que se consegiera con facilidad si se hallara la trisección del angulo.

PROBLEMA PROPOSICION XVI.

Inscrivir un pentadecagono regular en un circulo.

En el circulo (*de la fig. 12.*) sea inscrito el triangulo equilatero A B C (*2.*) y un pentagono regular (*11.*) que uno de sus angulos cayga en en el punto A, y dese la B E; digo, que esta será el lado del pentadecagono.

Demonstracion. El arco A B, es tercia parte de toda la circumferencia, y assi deve tener cinco tercios del pentadecagono; pero el arco D E, que es del pentagono contiene tres, y los dos A D, D E, 6. luego quitando de estos 6. los 5. de A B; quedarà el arco B E, para uno de los 15. del dicho pentadecagono: de que se sigue que su cuerda B E, será el lado del poligon. Que es lo que se buscava para inscrivir el pentadecagono.

Aqui termina Euclides su libro quarto, y yo por continuar con lo prometido, añado las questiones seguientes.

PROPOSICION I.

Dada una recta, descrivir sobre ella un quadrado, con un intervalo dado.

*Sea la recta A B (*fig. 13.*) sobre que se ha de descrivir el quadrado, con el intervalo de C: pues tomese dicho intervalo, y descrivase el triangulo equilatero B D E, prolongando la D E, de suerte que D F, sea su duplo; y dando la B F, indeterminada, se levantarà por el mesmo orden la A G; y dividiendo por mitad los angulos G A B,* *FBA*, con las lineas *AH*, *BG*, (9. l° 1.) que cortaràn las indeterminadas, en *H*, y *G*, se darà la *GH*; digo, que el quadrilatero *AH*, es el quadrado que se pide.

Demonstracion. *Porque el angulo BED, es la 3. parte de dos rectos* (c. 3. 32. l. 1.) *y los dos en E, iguales à dos rectos* (13. l. 1.) *serà el angulo BEF, los dos tercios de dos rectos: y siendo el triangulo BEF, isoceles* (d. 25. l. 1.) *sus angulos en B, y en F, seràn iguales* (5. l. 1.) *y cada uno la tercia parte de un recto; conque todo el angulo DBF, valdrà un recto; y por consequencia BF, serà perpendicular. Y lo mesmo se demonstrerà de AG, y las lineas BF, AG, paralelas* (28. l. 1.) *y siendo en el triangulo ABH, el angulo en B, recto, y BAH, medio recto; lo serà su angulo en H* (32. l. 1.) *y assi el lado BH, serà igual al lado AB* (6. l. 1.) *y por el mesmo camino se demonstrerà que AG, es igual de AB: conque los tres lados GA, BH, y AB, seràn iguales* (a. 1.) *de que se sigue que HG, serà igual y paralela de AB* (33. l. 1.) *como los angulos del quadrilatero en G, y en H, rectos, por iguales à sus opuestos* (34. l. 1.) *de que se infiere, que el dicho quadrilatero serà el quadrado descrito sobre la linea AB, con el intervalo C; porque las divisiones de los angulos, y todo lo demas es evidente, que se puede hazer con solo el intervalo dado.*

PRO-

PROPOSICION II.

Inſcrivir un exagono regular en un circulo, con un intervalo dado; ſin que para ello ſea neceſſario buſcar, ni ſervirſe del centro, ni formar (por conſtrucion) el angulo del exagono en la circumferencia.

Tireſe (en la fig. 14.) *qualquiera recta AB, y en uno de ſus extremos como en A, ſe levantarà AC, perpendicular* (*por el orden que para ello di en mi antecedente*) *que cortarà la circumferencia en C; de donde ſe darà la CB; que ſerà el diametro del circulo* (por la inverſa del Scholio de la 31. del 3.) *en cuyo extremo C, ſe levantarà en el modo dicho la perpendicular CD, que* (por la 18. l. 3.) *ſerà tangente. Agora de C, como centro ſe deſcrivirà un arco à diſcrecion, como DK; y tomando ſobre la circumferencia dos diſtancias, y ſean de D, à K; ſe tirarà CK, haſta cortar la circumferencia en E, dejando aſſi formado el angulo DCE; que es igual à el que pertenece al exagono, reſpecto abrazar dos tercios de dos angulos rectos: dividaſe luego la CE, por mitad en F.* (10. l. 1.) *y deſe la perpendicular FG,* (11. l. 1.) *prolongandola haſta cortar la circum-*

ferencia en H; y dando las rectas C G, G E, E B, y B H; se tirarà C H; y dividida por mitad en L; se levantarà la perpendicular L I, que dividirà el arco C I H, por mitad en el punto I (30 l. 3.) *respecto que prolongada pasarà por el centro* (3. l. 3.) *y tirando finalmente C I, y H I, se tendrà inscrito el exagono pedido.*

Demonstracion. *Porque el angulo D C E, es igual al de C G E, de su segmento alterno* (32. l. 3.) *serà este el de el exagono, por serlo el primero por construcion; y siendo en los triangulos C F G, E F G; los lados E F, C F, hechos iguales, como sus angulos en F, y F G, comun seràn iguales en todo ser* (4. l. 1.) *y assi C G, lo serà de G E, que seràn dos lados del exagono; y comprendiendo tres el semicirculo; E B, serà el tercero; y porque G H, dividio por mitad y en angulos rectos la C E, serà diametro* (c. de la 1. l. 3.) *y H B G, un semicirculo donde siendo dos lados del exagono G E, E B; serà el tercero B H: conque el arco C H, contendrà los otros dos: y este se dividio por mitad en I; luego lo seràn C I, H I; de que se sigue que dicho exagono serà equilateral: y porque todas las cuerdas iguales sustienen arcos iguales* (28. l. 3.) *serà tambien equiangulo* (27. l. 3.) *Conque havremos inscrito el exagono regular con un intervalo dado el qual si fuere tan pequeño que no pueda dividir la cuerda C E, por mitad; haciendo interseccaciones de sus extremos se tomarà de ellos igua-*

iguales distancias sobre la linea, hasta acercarse à la mediania, y poderlo hacer; y lo mesmo para levantar la perpendicular FG.

Por esta proposicion se pueden hacer otras como pedir se tire à un circulo dado, su diametro; sin dividir angulo ni linea por mitad: y esta se absolverà haciendo el angulo recto CAB, como se ha enseñado, y tirando el diametro CB.

Tambien se puede proponer que se dè geometricamente con un intervallo una linea, que sea la quarta parte del diametro, sin que se llege à conocer el centro, ni inscrivir el exagono, ni formar por construcion el angulo del equilatero en la circumferencia. Y à esta se responderà, dando la linea FG; porque siendo CE, sustensa del angulo del exagono, serà tambien el lado del equilatero inscrito: de que se infiere que la FG, serà la mitad del semidiametro y FH, su perpendicular. De suerte que podremos tambien pedir que se inscriva un equilatero con los preceptos que se dijo para el exagono que es no formar el angulo de la figura en la circumferencia: y en tal caso CE, serà un lado; CH, el tercero: y assi de otras muchas.

PRO-

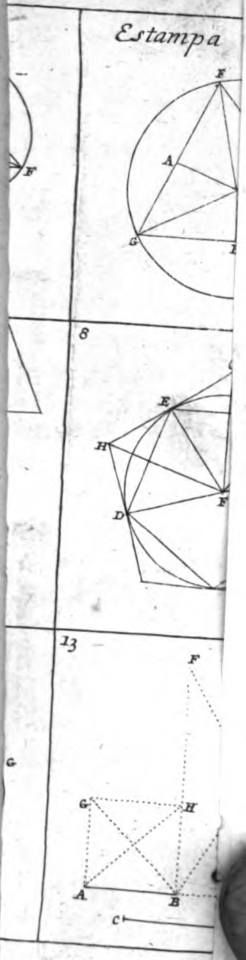
PROPOSICION III.

Dada una recta, tirar à un punto de ella otra, con la qual forme dos angulos tales; que añadiendole al uno, su mitad, todo el sea igual al otro.

Sea la recta AB (fig. 15. *) descrivase el triangulo isoceles ABC, que AC, sea igual de AB; guardando en todo lo que dice la 10. de este; digo que la recta CD, formarà en D, los angulos, pedidos.*

Demonstracion. *El triangulo ADC, se demonstrò en la 10. ser isoceles, como su angulo en A, ser el quinto de dos angulos rectos, y assi lo serà tambien su angulo en C; y estos dos por internos son iguales al angulo BDC; luego este valdrà los dos quintos de dos rectos: y siendo los dos en D, iguales à dos rectos (* 13. l. 1. *) valdrà el angulo ADC, tres quintos de dos rectos: de que se sigue que dividiendo por mitad el angulo BDC (* 9. l. 1. *) y añadido à el su mitad, que se harà un angulo de tres quintos de dos rectos, valor de el angulo ADC, que es lo que se devia hacer.*

La cosa es tan clara que no necessitò de dividir el angulo y añadir su mitad; pues queda demonstrado que se puede hacer. Y porque creo haver dado luz suficiente para aprovechar de las proposiciones del quarto libro; no me dilatarè mas passando aora à tratar del quinto.


Estampa
F
A
G
F
8
E
H
F
D
13
F
G
H
A
B
C
G

LIBRO QUINTO.

EN este Libro quinto trata Euclides de las proporciones y sus propiedades, cosa de que depende el verdadero conocimiento del sexto Libro: y tambien por este quinto Libro se demuestra la Arithmetica, la proporcion harmonica, la Prespectiva, la Statica (sciencia que trata de las fuerzas movientes como de artificios ingenios para levantar qualquier peso) y en conclusion es necessario para todas las partes de la Mathematica; y aunque este Libro es uno de los mas dificiles por la via que lo demuestra Euclides; todavia siguiendo yo algunos Autores modernos lo llevo por otro camino, que es mas facil y intelligible para los principiantes; los quales estando bien enterados de las definicio-

nes

nes que ſiguen, podràn con facilidad comprehender todos los Theoremas; reſpecto ſer ſus definiciones por donde ſe declara eſte libro.

DEFINICIONES.

1. Quando una cantidad menor, mide à otra mayor, ſe dice parte.

Como ſi fueſſe una linea de dos pies ò baras &c. y otra de quatro que partiendo eſta por aquella toca 2. lo meſmo que medirla, ò entrar en ella 2. vezes; y aſſi la de dos ſerà parte de la de 4. En general la parte ſe divide en alicota y aliquanta.

Parte alicota de una cantidad, es la que ciertas vezes repetida, mide ò iguala dicha cantidad.

Parte aliquanta es aquella, que aunque repetida nunca la mide juſtamente. Como por exemplo la linea, ò longitud de 2, pies es parte alicota de una de 10. pies; porque 5. vezes repetida iguala ò conſtituie la toda: pero una longitud de 4. pies es parte aliquanta de una de 10. porque repetida 2. vezes no la iguala y 3. vezes la excede.

2. Multiplice ſe dice à la mayor cantidad reſpecto ſu parte alicota.

Entendràſe eſto, con ſaber que una cantidad es multiplice de otra, quando la menor mide à la

mayor,

mayor; esto es quando la mayor contiene la menor, algunas vezes exactamente.

Partes alicotas semejantes, son las que igual numero de vezes son contenidas en sus todos; de suerte que tal parte como la una es de su todo, tal sea tambien la otra de su todo.

Y à estos todos llaman equimultiplices. Exemplo sean los grandores 8. y 6. y su parte alicota del mayor 4. que le mide dos vezes y la del semejante menor 3. que tambien mide al 6. otras 2. y en tal caso 8. y 6. seràn equimultiplices de sus partes. Alicotas semejantes 3. y 4.

3. Razon es la habitud ò respecto, que guardan dos cantidades entre si, de un mesmo genero.

Exemplo comparando 9. cantidades, como lineas, superficies, ò solidos &c. à 3. de la mesma especie que estàn en razon tripla porque partiendo 9. por 3. toca à 3. y esta es la razon tripla que dije guardavan estas dos cantidades, de las quales el 9. que se comparò, se dice termino antecedente y el 3. consequente; mas comparando el 3. al 9. estaràn estas cantidades en razon subtripla, respecto que partiendo el 3. por 9. toca $\frac{1}{3}$; y en este caso se llamarà à la cantidad de 3. termino antecedente, y à la de 9. consequente.

Dividese la razon en racional, y irracional;

y

y enigual ò desigual, y de mayor ò menor desigualdad.

La racional es la que se puede explicar por cantidad racional, como es la razon de 8. à 2. que es quadrupla, ò la de 6. à 4. que es sexquialtera, lo mesmo que dezir, que el 4. mide al 6. vez y media, y assi de las demas.

Pero la irracional es, quando comparadas 2. cantidades no se puede explicar su razon de la manera dicha; como succede comparando el lado del quadrado à su diagonal, donde siendo el lado por exemplo de 3. serà la diagonal raiz 18. numero irracional, y assi no se podrà comparar el lado que es racional con su diagonal, que es irracional.

La razon ò proporcion de igualdad es, quando se compara una cantidad à otra igual, como 10. à 10. &c. Y la de desigualdad, la que tiene dos cantidades desiguales; como la de 4. à 9. y assi de otras.

La razon de mayor desigualdad es, quando entre dos cantidades se compara la mayor à la menor, como 8. à 5. y al contrario la menor desigualdad es como 5. à 8. Y esto basta para la explicacion de la razon.

4. La proporcion es una similitud de razones.

Como si fuessen quatro cantidades, que la primera sea 9. y la segunda 3. cuya razon es tripla,

y

y fuesse la tercera 18. y la quarta 6. que tambien es tripla; digo, que estas quatro cantidades se dicen proporcionales, por haver la mesma razon ò proporcion entre las dos cantidades primeras, que entre las otras dos. Y llamase à esta, proporcion discreta; porque la continua ò geometrica es, quando 3. cantidades tienen la mesma razon de la primera à la segunda que de esta à la tercera. Como si fuessen 9. 6. y 4. cuya razon de la primera à la segunda es sexquialtera, y la mesma es de la segunda à la tercera, y si se augmentase de otra cantidad, hubiera tambien la mesma razon de la segunda à la tercera que de la tercera à la quarta, &c.

5. Las grandezas ò cantidades se dicen tener proporcion entre si, quando multiplicadas se exceden unas à otras.

Las cantidades de un mesmo genero se ha dicho en la tercera definicion, que guardan alguna razon, y en esta quinta se ha de entender, que la tendràn dos cantidades, quando multiplicada la una, puede exceder à la otra, como succede multiplicando el lado de un quadrado por 2. que el producto excede a su diagonal; supuesto que dos de sus lados juntos son mayores que la diagonal; de que se infiere que no se hallarà razon de una linea finita, à una infinita, supuesto que la terminada no se podrà

drà multiplicar de suerte que llegue jamas à exceder la infinita. Y de la mesma manera queriendo multiplicar una linea que de qualquiera manera que sea, nunca excederà à una superficie; por constar esta de latitud y longitud, y la linea solo de longitud.

6. Las cantidades se dicen estar en la mesma razon, la primera à la segunda, como la tercera à la quarta; si tomando los equimultiplices de la primera y tercera, y los de la segunda y quarta, tubiessen tal qualidad, que si el de la primera fuesse igual à el de la segunda, lo sea el de la tercera à el de la quarta; y si la primera mayor de el de la segunda, la tercera sea mayor de el de la quarta y si menor, menor.

Como si fuessen propuestas 4. cantidades que la primera sea de 3. la segunda de 6. la tercera de 4. y la quarta de 8. que multiplicando la primera y tercera por qualquier cantidad, y sea por 4. el multiplice de la primera serà 12. y el de la tercera 16. Multipliquense tambien la segunda y quarta por otra qualquiera cantidad, y sea por 2. y se tendrà el multiplice de la segunda de 12. y el de la quarta de de 16. y ya en este caso el equimultiplice de la primera es igual al de la segunda su correspondiente, como el de la tercera à el de la quarta; y si se toman de nuevo otros equimultiplices como los de la primera y tercera, y de la segunda y quarta, y que el de la primera sea mayor del de la segunda, como el de la tercera de el de la quarta. Y en fin tomando por la tercera vez equimultiplices, y siendo el de la primera menor de el de la segunda que el de la tercera lo sea tambien de el de la quarta; entonses diremos que las 4. cantidades propuestas estàn en la mesma razon, la primera à la segunda como la tercera à la quarta.

Noobstante esta explicacion me pareciò añadir la demonstracion siguiente; respecto que algunos interpretes lo hazen, dicendo, que siendo esta definicion la mas principal no tiene fuerza suficiente, para passar por un principio evidente.

Supongase que A (de la fig. 7. Estampa 7.) es à B, como C, à D; digo, que A, ha de contener de necessidad tantas vezes qualquiera alicota, ò alicotas de B, como C, una semejante de D. Si se dize lo contrario, y que A, contiene 100. vezes y una, la decima parte de B; y C, solo 100. vezes la decima parte de D: se sigue que la cantidad A, comparada con B, es un todo mayor que la cantidad C, comparada con D; y por lo consiguiente la comparacion ò relacion no seria la mesma; esto es que A, no seria à B, como C, es à D; que es contra lo supuesto.

N Y

Y al contrario, si AB (de la fig. 1. *) contiene tantas vezes una, ò qualesquiera alicotas de CD, como E, semejantes de F; digo, que havrà mesma razon de AB, à CD, que de E, à F.*

Si se niega que estas estàn en igual razon, estaràn en desigual; esto es que la una tendrà mayor razon à la otra, que la otra à la otra: supongamos pues, que AB, tenga à CD, si es possible mayor razon que E, à F, esto es que AB, es mayor de lo que es menester para tener à CD, la mesma razon, que E, à F; luego una cantidad menor que AB, exemplo AG; tendrà la mesma razon à CD, que E, à F. Dividase, CD, por mitad en H, y otra vez en I, y en K; si se continua esta division, es cierto que se hallarà una alicota de CD, menor que GB, y sea KD.

Demonstracion. *Por la suposicion, AG, es à CD, como E, à F; luego por el primer caso AG, contendrà tantas vezes KD (alicota de CD) como E, una semejante de F, pero por ser GB, mayor que KD; se sigue que AB, contiene mas vezes KD (parte alicota de CD) que E, una semejante de F; lo que es contra la suposicion.*

7. Las cantidades que estàn en una mesma razon, se dicen proporcionales.

Co-

Como si hubiese la mesma razon de 3. à 12. que de 4. à 16. y que en tal caso el 3. sea parte de 12. como el 4. semejante de 16. digo, que à estas 4. cantidades se diràn proporcionales : y siendo los terminos solos 3. y la razon de la primera à la segunda fuesse como la de la segunda à la tercera, tambien estas 3. seràn proporcionales, pero en proporcion continua.

8. De quatro cantidades habrà mayor razon de la primera à la segunda, que de la tercera à la quarta; si la primera contiene mas partes alicotas de la segunda, que la tercera semejantes de la quarta.

Como 101. primera, que tiene mayor razon à 10. segunda, que 200. tercera à 20. quarta porque 101. contiene 10. veces al 10. y mas uno, pero el 200. contiene solamente 10 vezes à 20. que tambien es su decimo.

9. La proporcion deve tener tres terminos por lo menos.

Porque para haver proporcion, es menester similitud de razones; de necessidad havrà de haver mas de dos terminos como 3. 4. ò mas, y quando fue-

N 2 ren

ren 3. se ha dicho serà proporcion continua, y en tal caso el primero tendrà la misma razon al segundo, que este mesmo al tercero, y siendo 4. los terminos; la razon del primero al segundo serà la del tercero al quatro, y assi de los demas.

10. Las cantidadas que estàn en proporcion continua tendràn la razon de la primera à la tercera duplicada, de la, de la primera à la segunda; y la razon de la primera à la quarta serà triplicada de la primera à la segunda.

Como si fuessen 4. cantidades que la primera sea 16. la segunda 8. la tercera 4. y 2. la quarta, digo que la razon de la primera à la tercera es duplicada, ò compuesta de dos razones, de la primera à la segunda; y estando la razon de 16. à 8. en dupla estarà la de 16. à 4. en quadrupla, que son ya dos razones, de la primera à la segunda; y de la mesma manera la razon de la primera à la quarta es triplicada ò compuesta de 3. razones, de la primera à la segunda, y estando esta como havemos dicho en dupla, estarà la de la primera à la quarta en octupla; y si hubiera otro termino, la razon de la primera à la quinta fuera quadruplada, ò compuesta de quatro razones, de la primera à la segunda, y assi al infinito.

11. En las cantidades proporcionales, el termino antecedente ſe dice homologo, ò de ſemejante razon al otro antecedente; y lo meſmo el un conſequente al otro conſequente.

Exemplo en 4. terminos, ò cantidades proporcionales, que el primer termino ò antecedente es homologo, ò de ſemejante razon al tercer termino, ò ſegundo antecedente, y lo meſmo es el ſegundo termino ò primer conſequente al quarto termino, ò ſegundo conſequente; y aſſi alternando, el tercero al primero, como el quarto al ſegundo, &c.

12. La razon alterna ò permutada es, quando haviendo comparado el ſegundo antecedente al primero; ſe compara el ſegundo conſequente al primero.

Eſto de alternar los terminos, ſe declarò en la explicacion antecedente.

13. La razon inverſa es, quando un conſequente ſe compara à ſu antecedente, como otro conſequente à ſu antecedente.

Esto es lo mesmo que dicir, que de 4. cantidades proporcionales, como si la primera es à la segunda como la tercera à la quarta, tambien la segunda à la primera serà, como la quarta à la tercera. Y esta ultima comparacion llaman razon inversa.

14. Razon compuesta es quando el antecedente y consequente juntos, se comparan à uno de ellos; y otro antecedente y consequente juntos à uno de ellos, semejante à el, que se tomó en los primeros.

Como si fuessen 4. cantidades proporcionales; que la razon de la primera y segunda juntas es à la primera la mesma, que la de la tercera y quarta juntas à la tercera: y assi se alternarà y invertirà esta proporcion segun se explicò en la alterna, y inversa; y advierto, que se pueden comparar 3. y mas terminos juntos, como aqui comparamos dos.

15. La razon dividida es, quando de la compuesta se dividen sus terminos; y que el antecedente sea al consequente, como otro antecedente à su consequente.

Sean

Sean por exemplo 4. cantidades, que la primera y segunda juntas, sean à la primera ò la segunda, como la tercera y quarta, juntas à la tercera ò quarta; digo que dividiendo los terminos, havrà la mesma razon de la primera à la segunda que de la tercera à la quarta.

16. La razon convertida es quando se compara el antecedente, à la differencia ò excesso de los terminos.

Esto es lo mesmo que obrar con la razon compuesta, por razon inversa; à que dizen convertir.

17. La razon igual es, quando algunos terminos proporcionales de una mesma parte, se comparan à otros semejantes, de otra parte.

Como haviendo 8. (ò mas) terminos, 4. à un lado, y 4. à otro, en la mesma razon; que el primero serà al segundo, como el quinto al sexto: y en la mesma razon estaràn el tercero con el quarto como el septimo con el octavo, y assi al infinito; ò tomando antecedente con antecedente, ò consequente con consequente, &c.

18. Proporcion bien ordenada es, quando comparando el antecedente à su consequente, se compara luego otro antecedente à su consequente.

Esta definicion es tan clara, que se explica ella por si.

19. Proporcion perturbada es, quando se comparan los terminos fuera de su orden.

Dicese proporcion perturbada, ò mal ordenada, quando 6. cantidades 3. de una parte, y 3. de otra tienen la mesma razon, la primera à la segunda, que la quinta à la 6. y la segunda à la tercera, que la quarta à la quinta. Y estas son las definiciones que los interpretes traben en el quinto libro de Eucli[illegible]

PETICION.

Pidese que propuestas tres cantidades, se conceda una quarta, con quien la tercera tenga la mesma razon, que la primera à la segunda.

Esta demanda que se haze aqui, no se puede dejar

dejar de conceder, supuesto, que en la definicion sexta se ha dicho que las cantidades son proporcionales, quando la primera, mide à la segunda tantas vezes, como la tercera à la quarta. Y assi si las cantidades propuestas fuessen tres, la primera 9. la segunda 3. y 24. la tercera, diremos que la quarta serà 8. porque siendo la razon de 9. à 3. tripla, partiendo el 24. por 3. de la razon, el producto 8. serà el quarto termino que se pide.

ADVERTENCIA.

Muchos Autores excusan las 6. primeras proposiciones de este libro, teniendo las por poco utiles; y yo siguiendolos no solo excuso estas 6. si no es todas aquellas, que son inversas, y se infieren de otras, respecto que (por exemplo) es evidente que si una cosa es menor que otra, esta serà mayor que aquella; y es excusado demonstrar lo ultimo, estandolo lo primero.

Tambien de la septima Proposicion à la 12. ay Autor que excusa su demonstracion, por decir que son Axiomas, y lo mesmo hazen à otras.

THEO-

Theorema Proposicion VII.

Las cantidades iguales tienen una mesma razon à una tercera: y una tercera tiene una mesma razon à las cantidades iguales.

Sean *(en la fig. 2. Estampa 7.)* las dos cantidades A, B, de 8. cada una; digo, que tendràn una mesma razon à una tercera C, de 4. y si esto se negase; serà porque alguna tendrà mayor razon, y sea A.

Demonstracion. Porque de A, à C, se quiere que ayga mayor razon que de B, à C: A, tendrà alguna parte alicota mas de C, que la cantidad B, semejantes de la mesma C, *(d. 8.)* luego A, seria mayor que B; y esto es contra el supuesto; luego las razones seràn iguales *(que aqui es subdupla ò de $\frac{1}{2}$.)*

En segundo caso digo, que siendo las cantidades A B, iguales; que la cantidad C, tendrà la mesma razon à la una que à la otra.

Demonstracion. Si se dijese que C, tiene mayor razon à A, que à B; C, contendrà alguna parte alicota mas de A, que otra semejante de B *(d. 8.)* conque A, y B, no serian iguales, lo que es contra el supuesto; luego la la mesma razon habrà de C, à A, que de C, à B: lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion VIII.

De dos cantidades la que fuera mas grande, tendrà mayor razon à otra tercera, que la mas pequeña: y la tercera tendrà mayor razon à la mas pequeña, que à la grande.

Sea en la (*fig.* 3.) A, de 10. y C, de 4. digo, que A, tendrà mayor razon à una tercera B, de 6. que C.

Demonstracion. Si A, C, fueran iguales, hubiera la mesma razon de A, à B, que de C, à B (7.) pero A, siendo mayor, contenderà mas partes alicotas de B, que puede contener de alicotas semejantes C, de B; y assi habrà mayor razon de A, à B, que de C, à B, (*d.* 8.)

Para el segundo caso supuesto que A, es mayor que C; siguese que B, contenderà mas vezes qualquiera alicota de C, menor; que semejante de A, mayor; luego mayor es la razon de B, à C, que la de B, à A, (*d.* 8.)

Theo-

Theorema Proposicion IX.

Las cantidades que tubieren la mesma razon à una tercera, seràn iguales entre si.

La demonstracion de esta Proposicion se infiere de la 7.

Theorema Proposicion X.

De dos cantidades la que tiene mayor razon à una tercera, es la mayor; y aquella serà la menor, à quien la tercera tubiere mayor razon.

De la mesma manera que la 9. hemos dicho, que se infiere de la 7. assi es evidente qne esta consta de la 8.

Theorema Proposicion XI.

Las razones que son iguales à una tercera, son iguales entre ellas.

Si (*en la fig. 4.*) la razon de A, à B, es igual de la de C, à D; y assi mesmo igual la de E, à F, à la de C, à D; digo, que la razon

zon de A, à B, y la de E, à F, seràn iguales: y si esto no fuesse assi alguna serà mayor; y sea la de E, à F.

Demonstracion. Porque la razon de E, à F, se quiere que sea mayor, que la de A, à B; serà tambien mayor que la de su igual C, à D, y esta razon se ha dicho ser igual à la de E, à F; luego la razon de C, à D, podria ser mayor y menor, lo que implica: conque la razon de E, à F, no es mayor que la de A, à B, ni menor; porque se hiziera la mesma demonstracion por la otra parte. Conque las razones, &c.

THEOREMA PROPOSICION XII.

Si algunas cantidades fueren proporcionales, habrà la mesma razon de un antecedente à su consequente; que de todos los antecedentes juntos, à todos los consequentes.

Si (*en la fig. 5.*) la razon de A, à B, es la mesma, que la de C, à D; digo, que habrà la mesma razon de el antecedente A, à su consequente B, que de los antecedentes A, C, juntos, à los consequentes B, D.

Demonstracion. Porque A, es à B, como C, C, à D; contendrà tantas vezes alguna parte alicota qualquiera que ſea de B, que C, contendrà una ſemejante de D (*d. 6.*) por exemplo el quarto; y aſſi el quarto de B, y el quarto de D, haràn el quarto de B D; y A Ç, juntas contendràn tantas vezes el quarto de B D, como A, contenderà el quarto de B; luego la razon de A, à B, ſerà la meſma que la de A C, juntas à B D; lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XIII.

Si de dos razones iguales, la una es mayor, ò menor que otra tercera; la otra lo ſerà tambien.

Eſta es Axioma, ò ſe infiere de la 11.

Theorema Proposicion XIV.

Si de quatro cantidades proporcionales, la primera es igual, mayor, ò menor que la tercera; la ſegunda ſerà igual, mayor, ò menor que la quarta.

Eſta conſta de la definicion 6.

Theo-

THEOREMA PROPOSICION XV.

Los equimultiplices y partes alicotas semejantes, estàn en la mesma razon.

Si las cantidades C, y D, *(fig. 6.)* son equimultiplices de A, y B, sus partes alicotas semejantes; havrà la mesma razon de A, à B, que de C, à D: dividase C, en partes iguales à A, (lo qual se puede, pues que A, mide à C, por suppoficion) y seràn las partes E, F, G. De la mesma manera D, podrà ser dividida en partes iguales à B, que seràn H, I, K; y supponiendo que C, y D, son equimultiplices de A, y B; havrà tantas partes en una, como en la otra.

Demonstracion. E, es à H, como F, à I, *(14.)* y por la mesma F, es à I, como G, à K, luego *(por la 12.)* la mesma razon ay de todos los antecedentes juntos; esto es de C, à todos los consequentes juntos, esto es à D, que de uno A, al uno B; que es lo que se devia demonstrar.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION XVI.

De la razon alterna.

Si quatro cantidades de una mesma especie, son proporcionales, lo seràn tambien alternativamente.

Si en la (*fig. 7.*) A, es à B, como C, à D; digo, que tambien A, serà à C, como B, à D.

Demonstracion. Porque A, es à B, como C, à D, seràn B, y D, partes semejantes de A, y C (*d. 6.*) y por la (*15.*) la razon de los todos A, y C, serà la mesma que de sus partes semejantes B, y D; luego A, es à C, como B, à D; lo que se devia demonstrar.

SCHOLIO.

Si en la dicha figura, hay la mesma razon de A, à B, que de C, à D; convertiendo serà D, a C, como B, à A; lo que es evidente por si mismo.

Este Scholio, trahe Euclides por Corolario, al fin de la quarta de este libro; que por haverse obmittido dicha proposicion, no se ha puesto: pero por convenir aqui, se ha hecho en este lugar.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION XVII.

De la razon dividida.

Quando las cantidades compuestas son proporcionales, lo seràn tambien divididas.

Si en la (*fig. 8.*) A B, es à B, como C D, à D; dividiendo serà A, à B, como C, à D.

Demonstracion. Porque A B, es à B, como C D, à D; A B, contendrà tantas vezes una parte alicota de B, como C D, contendrà una semejante de D (*d. K*) pero dicha parte alicota, se hallarà tantas vezes en B, como la semejante en D. De que se sigue, que quitando B, de A B; y D, de C D; quedaràn en A, tantas partes alicotas de B, como en C, semejantes de D (*a. 3.*) y por consequencia A, serà à B, como C, à D.

THEOREMA PROPOSICION XVIII.

De la razon compuesta.

Si las cantidades divididas son proporcionales, lo seràn, estando compuestas.

Esta es evidente por la antecedente.

O CO-

COROLARIO.

Si en la (*fig. 9.*) A B, es à B, como C D, à D; A B, serà à A, como C D, à C (*Scholio 16.*) y dividiendo serà A, à B, como C, à D, por la precedente: y por dicho Scholio, B, serà à A, como D, à C; y componiendo A B, serà à A, como C D, à C (18.)

THEOREMA PROPOSICION XIX.

Si de dos cantidades se quitan partes; y el todo es al todo, como la parte à la parte; el todo, serà al todo, como lo que quedò en el uno, à lo que quedò en el otro.

Esta es verdaderamente un axioma; pero la demonstraremos assi.

Si (*en la fig. 9.*) el todo A B, es al todo C D, como la parte B, à la parte D; la resta A, serà à la resta C, como A B, à C D.

Demonstracion. Porque A B, es à C D, como B, à D (*serà por la 16.*) A B, à B como C D, à D; y (*por el Scholio de la citada*) A B, serà à A, como C D, à C, luego A B, serà à C D, como A, à C (*por la mesma 16.*)

La

La Proposicion 20. y 21. son superfluas, segun el orden que aqui seguimos.

Theorema Proposicion XXII.

De la razon de igualdad bien ordenada.

Si tres ò mas cantidades de una parte, y otras tantas de otra, son proporcionales, de dos en dos en igual razon; y la primera es mayor que la tercera, la quarta serà mayor que la sexta si igual, igual, y si menor, menor.

Sean (*en la fig. 10.*) las cantidades A, B, C, y D, E, F, proporcionales; que de A, à B, ayga la mesma razon que de D, à E, y de B, à C, que de E, à F; digo, que la razon de A, à C, serà la mesma que la de D, à F.

Demonstracion. Porque A, es à B, como D, à E; B, serà à A, como E, à D (*Scholio 16.*) y por el mesmo C, serà à B, como F, à E; de que se infiere, que la razon que tienen B, y E, con sus antecedentes, es una mesma; y otro tanto succede con sus consequentes: luego componiendo, como B, es à A C, assi E, à D F; y dividiendo A, se-

 rà

rà à C, como D, à F; que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XXIII.

Si tres cantitades fueren proporcionales, à otras tres, tomadas de dos en dos, y en proporcion perturbada: el primero termino de una parte, serà à su ultimo, como el primero de la otra à su ultimo.

Sea (*en la fig. 11.*) A, à B, como E, à F, y B, à C, como D, à E; digo, que la razon de A, à C, serà la mesma que la de D, à F; sea hallada G (*peticion de este libro*) que B, sea à C, como F, à G.

Demonstracion. Porque A, es à B, como E, à F, y B, à C, como F, à G; A, serà à C, como E, à G (22.) y porque ay la mesma razon de B, à C, quiero decir de F, à G, que de D, à E; D, serà à E, como F, à G (11.) y alternando como D, es à F, assi E, à G; luego tomando en lugar de E G, à D F; A, serà à C, como D, à F; que es lo que se devia demonstrar.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION XXIV.

Si la primera es à la ſegunda, como la tercera à la quarta, y la quinta à la ſegunda, como la ſexta à la quarta; la compueſta de la primera y quinta, ſerà à la ſegunda, como la compueſta de la tercera y ſexta, à la quarta.

Sea (*en la fig. 12.*) A, à B, como C, à D, y E, à B, como F, à D; digo, que A E, ſerà à B, como C F, à D.

Demonſtracion. Porque A, es à B, como C, à D; A, contendrà alguna parte alicota de B, tantas vezes como C, una ſemejante de D (*d. 6.*) y por la meſma E, contendrà la parte alicota de B, tantas vezes, que F, una ſemejante de D; conque A, y E, contendràn alguna parte alicota de B, tantas vezes que C, y F, una ſemejante de D (*18*) luego A E, ſerà à B, como C F, à D: que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XXV.

Si quatro cantiddes son proporcionales; la mayor y la menor juntas, seràn mayores, que las otras dos.

Si *(en la fig. 13.)* AB, es à CD, como E, à F, y que AB, es la mayor, y F, la menor; AB, y F, juntas seràn mayores, que CD, y E.

Demonstracion. Porque AB, es à CD, como E, à F; y AB, mayor que E: CD; serà mayor que F *(14.)* cortese de AB, la parte A, igual à E; y de CD, la parte C, igual à F; y porque AB, es à CD, como A, à C, ò como E, à F; su igual B, serà à D, como AB, à CD *(19.)* y siendo por el supuesto AB, mayor que CD; se sigue que B, serà mayor que D: luego si se añade à las iguales A, y E, la C, y F, que son tambien iguales; A, y F, seràn iguales à C, y E; *(a. 2.)* y añadida à la AF, la B, que es mayor y à la CE; la D, que es menor, A, B, y F, seràn mayores que C, D, y E *(a. 4.)* que es lo que se devia demonstrar.

Aqui termina Euclides su quinto Libro. Pero porque muchos interpretes, añaden las

las ſeguientes propoſiciones, reſpecto citar por ellas algunos Geometras me parecio para mas abundancia traherlas.

Theorema Proposicion XXVI.

Si la razon de la primera à la ſegunda es mayor, que la de la tercera à la quarta; convirtiendo la de la quarta à la tercera, ſerà mayor que la de la ſegunda à la primera.

Si (*en la fig. 14.*) la razon de A, à B, es mayor que la de C, à D; digo, que la de D, à C, ſerà mayor que la de B, à A. Supongaſe que E, es à B, como C, à D, y aſſi (*por la 10.*) A ſerà mayor que E.

Demonſtracion. Supueſto que E, es à B, como C, à D (*por el c. de la 16.*) D, ſerà à C, como B, à E, y (*por la 8.*) la razon de B, à E, ſerà mayor que la de B, à A; luego la razon de D, à C, ſerà tambien mayor que la do B, à A. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XXVII.

Si la razon de la primera à la ſegunda es mayor, que la de la tercera à la quarta: alternando ſerà la de la primera à la tercera mayor, que la de la ſegunda à la quarta.

Si (*en la fig. 14.*) la razon de A, à B, es mayor que la de C, à D; digo que la de A, à C, ſerà tambien mayor que la de B, à D: ſupongamos que E, es à B, como C, à D, (*por la 10.*) A, ſerà mayor que E.

Demonſtracion. Porque ſe ſupone que E, es à B, como C, à D (*alternando por la 16.*) E, ſerà à C, como B, à D; y ſiendo A, mayor que E; la razon de A, à C, ſerà mayor que la de E, à C (*8*) de que ſe ſigue, que la de A, à C, es mayor que la de B, à D: que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XXVIII.

Si la razon de la primera à la ſegunda es mayor, que la de la tercera à la quarta; componiendo ſerà tambien la razon de la primera y ſegunda à la ſegunda, mayor, que la de la tercera, y quarta à la quarta.

Si (*en la fig. 14.*) la razon de la primera A, à à la ſegunda B, es mayor que la de C, à D; digo, que la de AB, à B, ſerà mayor que la de CD, à D. Supongaſe que E, es à B, como C, à D (*por la 10.*) A, ſerà mayor que E.

Demonſtracion. Siendo E, à B, como C, à D (*por la 18.*) EB, ſerà à B, como CD, à D; pero AB, es mayor que EB; luego la razon de AB, à B, ſerà mayor, que la de EB, à B; y por conſequencia, que la de CD, à D. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XXIX.

Si la razon de la primera y ſegunda à la ſegunda, es mayor, que la de la tercera y quarta à la quarta; tambien la de la primera à la ſegunda ſerà mayor, que la de la tercera à la quarta.

Eſta es la inverſa de la antecedente; y por eſto ſe excuſa ſu demonſtracion.

Theorema Proposicion XXX.

Si la razon de la primera y ſegunda à la ſegunda, es mayor que la de la tercera y quarta à la quarta: la razon de la quarta y tercera à la tercera, ſerà mayor, que la de la ſegunda y primera à la primera.

Eſta es la compueſta de la 26.

Theo-

THEOREMA PROPOSICION XXXI.

Si tres ò mas cantidades eſtàn en mayor razon à otras tantas, pueſtas en la meſma orden: la primera de las primeras tendrà mayor razon à ſu ultima, que la primera de las otras à la ultima.

Si (*en la fig. 15.*) la razon de A, à B, es mayor que la de D, à E; y la de B, à C, mayor que la de E, à F; la razon de A, à C, ſerà mayor, que la de D, à F.

Demonſtracion. Porque la razon de A, à B, es mayor que la de D, à E; tambien la de A, à D, ſerà mayor que la de B, à E *(14.)* y por la meſma, haviendo mayor razon de B, à C, que de E, à F; la razon de B, à E, ſerà mayor que la de C, à F; luego la razon de A, à D, es mayor que la de C, à F; y convirtiendo *(por la 26.)* la razon de A, à C, ſerà mayor que la de D, à F. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XXXII.

Si tres ò mas cantidades estàn en mayor razon, à otras tantas puestas en differente orden; la primera de las primeras tendrà mayor razon à su ultima, que la primera de las otras à la ultima.

Si *(en la fig. 16.)* la razon de A, à C, es mayor que la de I, à K; y assi mesmo la de C, à E, mayor que la de H, à I; digo, que A, tendrà mayor razon à E, que H, à K: supongase que la razon de B, à C, sea la mesma que la de I, à K; y tambien la de C, à F, como la de H, à I; entonzes A, y F, seràn mayores que B, y E, cada una de la suya *(10.)*

Demonstracion. Supuesto que B, es à C, como I, à K; y C, à F, como H, à I; tambien serà B, à F, como H, à K *(23.)* luego la razon de A, à F, serà mayor que la de B, à F *(8.)* y tambien por la mesma la de A, à E, mayor que la de A, à F; siendo F, mayor que E: de que se sigue que la razon de A, à E, es mayor que la de H, à K. Que es lo que se devia demonstrar.

Theo-

Theorema Proposicion XXXIII.

Si el todo es en mayor razon al todo, que la parte à la parte: serà el todo en menor razon al todo, que la resta à la resta.

Si (*en la fig. 17.*) la razon del todo A B, al todo C D, es mayor que de la parte B, à la parte D; digo, que la razon de la resta A, à la resta C, serà mayor que la de A B, à C D.

Demonstracion. Porque ay mayor razon del todo A B, al todo C D, que de B, à D, alternando segun la (*27.*) havrà mayor razon de A B, à B, que de C D, à D; y convirtiendo por la (*30.*) havrà menor razon de A B, à A, que de C D, à C; luego alternando otra vez menor razon havrà de A B, à C D, que de B, à D, que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XXXIV.

Las razones duplicadas, triplicadas, &c. de razones iguales, son tambien iguales entre si.

Supongase (*en la fig. 18.*) que A, es à C, en razon duplicada de A à B, ò de B, à C, assi mismo sea la de E, à O, duplicada de la

de

de E, à F, ò de F, à O. Digo que dichas razones duplicadas, triplicadas, &c. seràn tambien iguales entre si.

Demonstracion. Por la suposicion la razon de A, à C, es duplicada de la razon de A, à B: luego por la (*d. 10. l. 5.*) A, serà à B, como B, à C; y por la misma causa E, à F, como F, à O. Siendo pues (por la suposicion) A, à B, como E, à F, y B, à C, como A, à B; esto es (*por la 11. l. 5.*) como E, à F, y como F, à O; serà en razon de igualdad (*por la 22. l. 5.*) A, à C, como E, à O. Que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XXXV.

Si hubiere razones iguales, y duplicadas, ò triplicadas, &c. de otras razones, estas ultimas seràn tambien iguales entre si.

Sean (*en la fig. 18.*) iguales las razones de A, à C, y de E, à O; y duplicadas ò triplicadas, &c. de las razones de A, à B, ò de B, à C, y de E, à F, ò de F, à O; digo que todas estas razones, seràn tambien iguales: esto es que A, serà à B, como E, à F; y B, à C, como F, à O. Si se niega, sea A, à B, como E, à otra no igual à F, como Z; y hagase como E, à Z, assi Z, à otra tercera como X.

De

Demonstracion. (*Por la d. 10. l. 5. y por la construcion*) la razon de A, à C, y la de E à X, son duplicadas de la razon de A, à B, y de E, à Z; luego (por la precedente) la duplicada de A, à C, serà igual, a la razon duplicada de E, à X; esto es que A, serà à C, como E, à X: luego (*por la 11. l. 5.*) tambien la razon de E, à X, serà igual à la razon de E, à O; esto es que E, serà à X, como E, es à O, luego (*9. l. 5.*) X, y O, seràn iguales: de que se sigue que E, F, O, son tres continuas proporcionales, y assi mismo lo seràn E, Z, X; y las dos extremas E, O; E, X, se han provado iguales, siguese que las dos medias, F, y Z, lo seràn tambien: luego A, serà à B, como E, à F, esto es Z; que es lo que se devia demonstrar.

Bien considerado las mas de estas Proposiciones que aqui se han añadido, no es otra cosa que alternar, convertir, componer y dividir, &c. las razones, y pues Euclides no las pone, pareçe que sin ellas, se puede usar de sus elementos, sacandolas por consequencia; mas la justificacion y rigor mathematico pide toda sta claridad, razon porque se han puesto aqui dando con ellas fin al Libro quinto. Del qual depende todo lo que sigue.

LI-pa 7.

3.

A, 10. C, 4.

B, 6.

4.

A, 9. B. 3. E, 12. F. 4.

C, D. 6. 2.

7

A, B, C, D. 12 8 9 6

8.

A, B, C, D. 5. 3. 10. 6.

9

8. 4.
A, C, 12. 6.

B, D, 4. 2.

F 6.

C, D. 9. 3.

13.

B, D, 8. 6.

A, C, E, F. 4. 3. 4. 3.

14.

A, B, C, D. 9. 4. 6. 3.

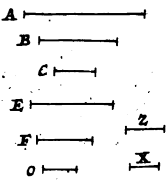
E, 8.

K. 1.

17

A B C D 13. 4. 6. 2.

18



LIBRO

SEXTO.

EN este Libro sexto nos muestra Euclides à usar en las figuras planas de la proporcion que guardan unas con otras, y las que tienen sus lados entre si semejantes: para todo lo qual es proprio el 5. Libro y en fin es por donde, valiendonos de figuras proporcionales, se hazen varios instrumentos Geometricos y miden toda suerte de distancias usando de la regla de tres, cuya demonstracion depende de la 16. de este Libro: y en conclusion tenemos el modo de buscar lineas proporcionales respecto otras.

DE-

DEFINICIONES.

1. Figuras ſemejantes rectilineas, ſon aquellas que tienen todos ſus angulos iguales cada uno al ſuyo, y los lados que forman los angulos iguales proporcionales.

*Como en los triangulos BCD, FGH (*fig. 1. Eſtampa 8.*) cuyos angulos correſpondientes ſiendo iguales, y como BC, à CD, aſſi FG, à GH, y lo meſmo de los otros; digo que eſtos triangulos ſeràn ſemejantes.*

2. Figuras reciprocas ſon aquellas, cuyos lados que forman angulos iguales ſe comparan de manera, que el primero y quarto termino ſe hallen en una meſma figura, y el ſegundo y tercero en la otra.

*Exemplo en la (*fig. 2.*) donde ſi AB, es à FE, como FG, à BC; digo que à eſtas ſe diràn figuras reciprocas.*

3. Una linea recta ſe dice eſtar dividida en media y extrema razon, quando la toda

toda es al mayor ſegmento, como eſte al menor.

Como ſi la toda IK (fig. 1. *) es à ſu mayor ſegmento IL, como eſte al menor LK; que en tal caſo la toda eſtarà dividida en media y extrema razon en L.*

4. La altura de una figura es la perpendicular, que de ſu vertice tirada à ſu baſa cayga dentro de la figura, ò fuera ſobre la baſa prolongada, y dicha figura eſtarà ò podrà eſtar entre meſmas paralelàs que otra de igual altura.

5. Una razon ſe dice eſtar compueſta de razones, quando multiplicadas las denominaciones de las razones, unas por otras, hazen una tercera razon.

Exemplo, ſean propueſtos tres terminos 12. el primero 6. el ſegundo y 2. el tercero donde la razon de 12. à 6. es dupla, cuya denominacion es 2. y la de 6. à 2. tripla, cuya denominacion es 3. y multiplicando eſta, por la otra, producen 6. Y aſſi diremos, que la razon compueſta de eſtas dos razones es ſextupla.

Theorema Proposicion I.

Los triangulos y paralelogramos de iguales alturas, tienen la mesma razon que sus basas.

Sean los triangulos *(de la fig. 3.)* ABC, GFH, de iguales alturas; digo, que tendràn la mesma razon que sus basas.

Supongase dividida la basa B C, en las partes iguales, que se quisiere, y sea en tres; de que B E, sea la una, y E D, D C, las otras, tirense las rectas A E, y las demas: vease quantas vezez B E *(* tercia parte de B C*)* cave en H G *(2. l. 1.)* y suppongase que se hallo 6. vezes tirense las rectas IF, L F, &c.

Demonstracion. Porque se supone el triangulo total A B C, dividido en 3. triangulos, que tienen un vertice comun A, y por consiguiente la mesma altura; se sigue que podràn ser puestos entre unas mesmas paralelas *(d. 4.)* y teniendo, por la suposicion, basas iguales, dichos triangulos seràn iguales entre si *(38. l. 1.)* luego la basa BE, y el triangulo ABE, son partes alicotas semejantes de sus todos *(d. 1. l. 5.)* lo mesmo sucede con los otros dos: y con el mismo discurso se demuestrarà que los triangulos FIH, FIL, &c. son iguales entre si, y cada

uno

uno de ellos igual, al triangulo ABE; y assi la basa IH, y el triangulo FHI, son partes alicotas semejantes de sus todos: luego tantas vezes como el triangulo total ABC, antecedente, contiene al total FHG, consequente ò bien una parte alicota FHI; tantas vezes la basa BC, antecedente, contendrà la basa GH, consequente, ò una alicota semejante HI; esto es que si el triangulo contuviese tres tercias partes del triangulo FGH, tambien la basa BC, contendria tres tercias partes de la basa GH: y esto mismo se verificarà de todas las partes en que al infinito se considerare dividida la basa BC. Luego (*por la d. 6. l. 5.*) el triangulo es al triangulo, como la basa à la basa que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion II.

Si en un triangulo se dividen dos de sus lados, por una linea paralela al tercero; se dividiràn proporcionalmente: y si se dividen proporcionalmente, la linea que los divide serà paralela al tercer lado.

Sea en el triangulo (*de la fig. 4.*) la linea ED, paralela al lado CB; digo, que los otros estaràn divididos por ella proporcionalmente; dense D C, E B.

Demonstracion. Porque los triangulos C D E, E D B, estàn entre mesmas paralelas y con la basa comun E D; seràn iguales *(37. l. 1.)* y la razon que el uno tubiere al triangulo A E D, la mesma tendrà el otro *(7. l. 5.)* y pòrque por el vertice D, se puede tirar una paralela à la A C, los triangulos A E D, E D C, estaràn entre ellas; y por consequencia tendràn una mesma altura *(d. 4.)* luego como el triangulo al triangulo, assi la basa A E, à E C *(1.)* Y lo mesmo se demonstrarà de la otra parte, y assi serà C E, à E A, como B D, à D A, *(11. l. 5.)*

En segundo caso digo, que dividiendo la D E, los dos lados proporcionalmente, que serà paralela à C B.

Demonstracion. Por el primer caso el triangulo A E D, tiene la mesma razon à E D C, que à E D B; y assi estos dos ultimos seràn iguales *(9. l. 5.)* y teniendo la E D, por basa comun estaràn entre mesmas paralelas *(39. l. 1.)* de que se sigue que E D, lo serà à C B: que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION III.

Si una recta divide un angulo de un triangulo por mitad; dividirà su lado opuesto en la mesma razon que tubieren los otros dos lados: y si la razon de estos fuere la mesma que la de las secciones del otro; la linea tirada del angulo opuesto le dividirà en dos partes iguales.

Sea *(en la fig. 5.)* donde la A D, dividiò el angulo por mitad en A; digo, que la razon de B D, à D C, serà la mesma que la de A B, à A C: prolonguese A C, indeterminada, y dese B E, paralela à A D *(31. l. 1.)* hasta concurrir en E.

Demonstracion. Porque E B, se ha dado paralela à A D, el angulo en E, serà igual al de D A C *(29. l. 1.)* y por la mesma lo serà E B A, de B A D; y siendo el angulo C A B, dividido en dos partes iguales por suposicion, serà el angulo en E, igual al de A B E *(a. 1.)* y assi el triangulo A B E, serà isoceles *(6. l. 1.)* y todo el triangulo E B C, dividido proporcionalmente por la A D, paralela de E B. Luego como E A *(* quiero decir su igual A B*)* es à A C, assi B D, serà à D C *(2.)*

Digo en segundo caso que si B D, es à D C, como A B, à A C; que la A D, dividirà el angulo en dos partes iguales. Acavese la figura como se ha dicho.

Demonstracion. Porque las secciones de la basa del triangulo ABC, estàn en la mesma razon que los otros lados, serà EB, paralela à AD *(2.)* y por la alternacion que en el caso precedente se hizo de los angulos, se demonstrarà como los angulos en E, y en B, del triangulo EAB, son iguales à los dos en A, del triangulo BAC, cada uno al suyo; y haviendose estos primeros demonstrado iguales, estos ultimos lo seràn tambien. Que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion IV.

Los triangulos equiangulos tienen los lados que forman angulos iguales proporcionales.

Sean los triangulos equiangulos *(de la fig. 6.)* que el angulo ABC, sea igual de DCE, y assi de los otros cada uno al suyo; digo, que BA, serà à BC, como CD, à CE; y de la mesma manera BA, à AC, como CD, à DE: hagase de suerte que los dos triangulos tengan sus basas semejantes sobre una mesma linea BE, y prolonguense BA, ED, hasta concurrir en F.

De-

Demonstracion. Porque los angulos A C B, D E C, son iguales las lineas A C, F E, seràn paralelas como C D, y B F *(29. l. 1.)* y el quadrilatero F C, un paralelogramo *(d. 36. l. 1.)* y porque en el triangulo B F E, A C, es paralela à F E, y D C, à F B; serà B A, à A F, ò C D, su igual como B C, à C E *(2.)* y alternando A B, serà à B C, como D C, à C E, y assi mismo F E, ò A C, su igual, serà à D E, como B C, à C E; y alternando A C, serà à B C, como D E, à C E. Que es lo que se devia demonstrar.

COROLARIOS.

1. Por esta Proposicion es manifiesto, que si un triangulo se corta con una paralela à uno de sus lados, (como A B C, *fig. 7.*) que cortarà un triangulo proporcional al todo.

2. Y si en dicho triangulo se tira una linea del angulo opuesto que corte dichas paralelas, las cortarà proporcionalmente.

THEOREMA PROPOSICION V.

Los triangulos que tienen los lados correspondientes proprocionales, son equiangulos.

Esta es evidente por la antecedente, por ser la inversa de ella.

THEOREMA PROPOSICION VI.

Los triangulos que tienen los lados proporcionales de al rededor de un angulo igual, son equiangulos.

Sean *(en los triangulos de la fig. 7.)* los angulos en B, y en E, iguales; y el lado A B, à B C, como D E, à E F; digo, que los triangulos seràn equiangulos. Hagase el angulo F E G, igual al angulo B; y E F G, igual à C *(23. l. 1.)*

Demonstracion. Porque los triangulos A B C, E G F, tienen dos angulos iguales à dos angulos cada uno al suyo, seràn equiangulos *(c. 1. 32. l. 1.)* y assi A B, serà à B C, como E G, à E F (4.) y como A B, es à B C, assi D E, à E F: luego serà D E, à E F, como G E, à E F; de que se sigue que D E, y E G, seràn iguales *(7. l. 5.)* y teniendo los triangulos D E F, G E F, los angulos en E, cada uno igual al angulo B; y los lados D E, E G, iguales, y el lado E F, comun, los triangulos seràn iguales en todo ser *(4. l. 1.)* y siendo el triangulo E G F, equiangulo à A B C; lo serà este à D E F *(a. 1.)* que es lo que se devia demonstrar.

La 7. es inutil.

THEO-

Theorema Proposicion VIII.

Si de un triangulo rectangulo se tira una perpendicular del angulo recto à su lado oppuesto; le dividirà en dos triangulos equiangulos, siendolo cada uno al total.

Sea *(en el triangulo de la fig. 8.)* tirada del angulo recto B, la perpendicular BD; digo, que todo el triangulo ABC, estarà dividido en dos triangulos equiangulos, que cada uno lo serà del total.

Demonstracion. El triangulo BDC, tiene su angulo en D, recto, por construccion, como el triangulo total su anguloen B, por supposicion, y el angulo en C, les es comun; luego seràn equiangulos *(c. 1. 32. l. 1.)* y assi mismo el triangulo ABD, como el total, tienen el angulo en A, comun y sus angulos en B, y en D, rectos; de que se sigue, que tambien seràn equiangulos; y assi los dos en que està dividido el total, lo seràn entre si *(4. 1.)* que es lo que se devia demonstrar.

Corolario.

De esta demonstracion es manifiesto, como la perpendicular tirada del angulo recto, es media

dia proporcional entre los dos ſegmentos en que divide ſu lado opueſto : y cada uno de los lados que forman el angulo recto lo es entre todo el lado opueſto al angulo recto, y el ſegmento que le toca.

Porque ſiendo los dos triangulos menores equiangulos, ſerà AD, à BD; como eſta meſma à DC, *(4.)* luego BD, ſerà media proporcional entre los dos ſegmentos *(d.7.l.5.)* Y de la meſma manera como AD, à AB, aſſi eſta, à AC; conque por la citada AB, es media proporcional entre el ſegmento AD, y la toda AC. Y por el meſmo camino ſe demonſtrarà, como BC, es media proporcional entre ſu ſegmento DC, y la toda.

PROBLEMA PROPOSICION IX.

Tomar de una recta terminada, la parte que ſe quiſiere.

Sea propueſta la recta A *(fig. 9.)* de la qual ſe quiere tomar ſu quinta parte; pues tireſe BC, indeterminada, y con qualquier intervalo ſe tomaràn ſobre ella cinco partes iguales, porque ſe quiere el quinto de la propueſta; y adonde ſe terminàren como en C, ſe harà con el meſmo intervalo y centro C, un arco azia E; y con la abertura de BC, y centro B, la interterſecacion E; y dando la CE, y BE, ſe cortarà BD, igual à A: y finalmente ſe darà DF, paralela à CE; *(31. l. 1.)* digo, que DF, ſerà la quinta parte de A.

Demonſtracion. Porque en el triangulo BCE, la DF, es paralela à CE; ſerà CE, à CB, como DF, à DB *(cor. de la 4.)* y CE, es por conſtrucion quinta parte de BC; luego DF, lo ſerà de BD; quiero decir de ſu igual A, que es lo que ſe devia hacer.

Problema Proposicion X.

Dividir una recta dada, ſegun otra eſtuviere dividida.

Sea, en la figura antecedente, BC, dividida en cinco partes iguales, y dada la A, à dividir de la meſma manera: digo, que acavada la figura, DF, dividirà la dada en cinco partes, como eſtà BC *(9.)* y ſe ha pedido.

Problema Proposicion XI.

Dadas dos rectas, hallarles una tercera proporcional.

Sean las rectas A, y B *(fig. 10.)* agaſe qualquier angulo CDE, y DF, igual à A; y FE,

à

à B; y assimismo igual à esta la DG; y dando la FG, se tirarà paralela à ella la EC; digo, que GC, es la tercera proporcional que se busca.

Demonstracion. en el triangulo EDC, la GF, y EC, son paralelas *(por construcion)* y assi havrà la mesma razon de DF, à FE que de DG, su igual à GC *(2.)* Luego GC, es la tercera proporcional que se ha pedido.

S C H O L I O.

Se podrà la Proporcion dada continuar, no solamente con tres terminos pero al infinito.

Esto es si la razon de desigualdad menor se continuare repetidamente, se llegarà de necessidad à una cantidad, mayor que qualquiera dada ò supuesta. Y si la razon de desigualdad mayor se continuare repetitamente, se llegarà de necessidad à una cantidad menor que qualquiera dada ò supuesta.

Este es verdaderamente un axioma, pero lo mostraremos de esta manera. Sea por exemplo (en la fig. 8.) *G, una cantidad tan grande como se quisiere, y sea la razon de O, à P, de desigual-*

dad

dad menor; esto es que el antecedente sea menor que el consequente. Busquese la 3. 4. 5. &c. proporcional; digo, que finalmente se llegarà à tener una cantidad mayor que la dada G. La razon es clara porque no siendo la cantidad G, infinita, y quedando siempre la misma, y augmentandose siempre mas y mas los terminos consequentes de la construcion; es preciso se llegue finalmente à un consequente mayor que la cantidad supuesta.

Lo mesmo succede con el segundo caso, quando es razon de desigualdad mayor. Porque siendo el antecedente, por la suposicion, mayor que el consequente, y repitiendo los terminos de suerte que vayan continuamente minorando; es cierto que se llegarà à una cantidad menor que la dada.

PROBLEMA PROPOSICION XII.

Dadas tres rectas, hallar una quarta proporcional.

Sean *(en la fig. 11.)* propuestas las rectas A, B, H: construyase la figura como en la antecedente, con la differencia, de que DG, sea igual à la tercera H; y en tal caso, DF, serà à FE, como DG, à GC *(2.)* de que se infiere que GC, serà la quarta proporcional pedida.

Problema Proposicion XIII.

Dadas dos rectas, hallar entre ellas la media proporcional.

Sean las rectas A, B, *(de la fig. 12.)* juntense las dos sobre una recta en C, que serà de D, à E, sobre la qual se descrivirà el semicirculo DFE; y levantando de C, la perpendicular CF; se daràn DF, EF, y se tendrà el angulo total en F, recto *(31. l. 3.)* y assi la perpendicular CF, del triangulo DFE, serà media proporcional entre los segmentos DC, CE, *(8.)* y estos son iguales à las linias dadas; conque se les habrà hallado à estas, su media proporcional como se ha pedido.

COROLARIO.

De aqui se infiere, que si de qualquier punto de la circumferencia se baxare una perpendicular al diametro, que esta serà media proporcional entre sus segmentos.

Nota. *Paraque los afficionados no carezcan de esta noticia, hè querido advertir aqui, como hasta hora de quatro continuas proporcionales dadas las extremas, nadie ha hallado las dos medianas por demonstracion geometrica; lo que es muy facil por Aritmetica.*

Theo-

THEOREMA PROPOSICION XIV.

Los paralelogramos que tienen un angulo igual à un angulo; tienen los lados que forman eſtos angulos reciprocos: y ſi tienen los lados reciprocos de al rededor de iguales angulos, ſeràn iguales.

Sean *(en la fig. 13.)* los paralelogramos A C, B F, iguales, como aſſi miſmo ſus angulos en B; donde unidos los paralelogramos ſeràn A B, y B G, una linea recta, y lo meſmo C B, y B E *(14. y 15. l. 1.)* digo, que A B, ſerà à B G, como E B, à B C. Acaveſe el paralelogramo B H.

Demonſtracion. Porque los paralelogramos F B, B D, ſon iguales, tendràn una meſma razon al paralelogramo B H *(7. l. 5.)* y aſſi como el paralelogramo F B, es à B H, de una meſma altura aſſi la baſa E B, à B C *(1.)* y por la meſma como D B, à B H, aſſi A B, à B G; luego como E B, à B C, aſſi A B, à B G *(11. l. 5.)* conque los lados de dichos paralelogramos ſeràn reciprocos *(d. 2.)*

En ſegundo caſo: digo, que ſiendo, por lo ſupueſto, E B, à B C, como A B, à B G: ſerà F B, à B H, como D B, al meſmo B H *(1.)* conque *(por la 9. l. 5.)* los paralelogramos ſeràn iguales. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XV.

Los triangulos iguales, que tienen un angulo igual à un angulo, tienen los lados que los forman reciprocos: y ſi eſtos lados ſon reciprocos, los triangulos ſeràn iguales.

Eſta es evidente por la antecedente, reſpecto que todo triangulo es mitad de un paralelogramo (*34. l. 1.*) y aſſi acavados los paralelogramos y toda la figura como antes, ſe ſeguirà ſu Demonſtracion.

Theorema Proposicion XVI.

Si quatro lineas ſon proporcionales, el rectangulo hecho de las extremas ſerà igual à èl de las medianas: y ſi el de eſtas es igual à el de las extremas, las quatro lineas ſeràn proporcionales.

Sean (*en la fig. 14.*) A, à B, como C, à D: digo, que el rectangulo E, echo de A, en D, ſerà igual al rectangulo F, echo de B, en C.

De-

Demonstracion. Porque los rectangulos E, y F, tienen un angulo igual à un angulo respecto ser todos rectos, y estar formados de lados reciprocos; se sigue que los dichos rectangulos seràn iguales (*14.*)

Para el segundo caso digo, que siendo los rectangulos iguales, tendràn sus lados reciprocos (*14.*) y assi, como A, à B, assi C, à D. Que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XVII.

Si tres lineas son proporcionales, el rectangulo de las extremas serà igual al quadrado de la mediana: y si este quadrado es igual al rectangulo de las extremas las tres lineas seràn proporcionales.

Sean (*en la fig. 15.*) A, à B, como B, à D; digo, que el rectangulo de A, en D, serà igual al quadrado de B. Añadese C, igual à B, y serà A, à B, como C, à D; hagase el rectangulo de B, en C, y sea E; y el de A, en D, y sea F.

Demonstracion. Porque por la suposicion A, es à B, como C, su igual à D; el rectangulo de A, en D, serà igual al de B, en C (*16.*) y el de estas (que es E) siendo ellas iguales serà un quadrado, y igual al rectangulo de aquellas, que es F.

Digo en segundo lugar, que siendo el rectangulo de A, en D, igual al quadrado de B: A, serà à B, como C, quiero decir su igual B, à D. Que es lo que se devia demonstrar.

COROLARIO.

De aqui consta, que si de tres lineas proporcionales, el rectangulo de las extremas es igual al quadrado de la mediana; que describiendo sobre las extremas como una, un semicirculo, y levantando una perpendicular, donde se juntaren à la circumferencia, que esta serà igual de la mediana.

PROBLEMA PROPOSICION XVIII.

Sobre una recta dada, describir un Poligone semejante à otro, y semejantemente descrito.

Sea propuesta la recta AB (*fig. 16.*) sobre la qual se ha de describir un Poligone semejante à el de CD. Pues dividase este en triangulos; y hagase el angulo ABH, igual de CFE, (*23.l.1.*) y por la mesma, el angulo en A, igual

al

al angulo en C; digo, que las lineas que los formaren concourirân en H, formando el triangulo A B H; equiangulo à C F E: *(c.1. 32. l.1.)* y de la mesma manera se descrivirà sobre B H, un triangulo equiangulo à F D E, y se tendrà el poligon A G, semejante, y semejantemente descrito, al de C D.

Demonstracion. Porque los triangulos que son partes de los poligones; son equiangulos; los poligones lo seràn tambien, y los lados de alrededor de sus angulos iguales seràn proporcionales (*4.*) y assi comó C F, à F E, assi A B, à B H; y assimismo como F E, à F D, assi B H, à B G; y por razon igual, C F, serà à F D, como A B, à B G; y lo mesmo de los demas conque los poligones seràn semejantes *(d. 1.)* y semejantemente descritos, como se ha pedido.

S C H O L I O.

Es evidente por lo domonstrado que si el poligon propuesto fuere de mas lados, que se dividirà en mas triangulos, y que biendo prosiguiendo assi, que se tendrà el poligon pretendido.

Theorema Proposicion XIX.

Los triangulos ſemejantes eſtàn en duplicada razon de la de ſus lados homologos.

Sean propueſtos los triangulos ſemejantes A B C, D E F (*fig. 17.*) digo, que tendràn la razon duplicada de la de ſus lados homologos; por exemplo la duplicada de B C, à E F. Buſqueſe à eſtos dos lados la tercera proporcional (*11.*) y hallada, ſe pondrà de B, à G, y ſe tirarà A G.

Demonſtracion. Porque B G, es la tercera proporcional; ſerà B C, à E F, como eſta, à B G (*d. 9. l. 5.*) de que ſe ſigue que la razon de B C, à B G, ſerà duplicada de la de B C, à E F (*d. 10. l. 5.*) y ſiendo los triangulos propueſtos ſemejantes, ſerà A B, à D E, como B C, à E F (*4.*) y eſta ultima razon hemos dicho ſer la meſma que de E F, à B G; luego A B, ſerà à D E, como E F, à B G (*11. l. 5.*) conque los triangulos A B G, D E F, que tienen los lados reciprocos y ſus angulos en B, y en E, iguales lo ſeràn ellos entre ſi (*15.*) y el triangulo A B C, tendrà la meſma razon al uno, que al otro (*7. l. 5.*) Y porque los triangulos A B C, A B G, tienen una meſma altura, ſerà el primero al ſegundo como ſu baſa

B C,

BC, à la basa BG *(1.)* y esta es duplicada de la de BC, à EF; luego la del triangulo ABC, à DEF, serà duplicada de la de BC, à EF: que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XX.

Los Poligones semejantes, se pueden dividir en igual numero de triangulos semejantes entre si, y proporcionales à sus todos: y los Poligones son uno à otro en duplicada razon de sus lados homologos.

Sean los poligones semejantes *(de la fig. 18.)* digo, que divididos como parecen en triangulos, seràn estos semejantes entre si.

Demonstracion. Porque los poligones son semejantes, sus angulos correspondientes en B, y en H, seràn iguales *(d. 1.)* y assi el lado AB, serà à BC, como GH, à HI *(6.)* de que se sigue que los triangulos ABC, GHI, seràn semejantes: y porque los angulos en E, y en M, son tambien iguales demonstraremos por el mesmo camino como los triangulos ADE; GLM, son semejantes; y por consequencia sus angulos en C, y en I, iguales; que quitados de sus totales quedaràn ACD, GIL, iguales *(a. 3.)* y en tal caso serà AC, à CD, como GI, à IL *(4.)* y lo lo mesmo se demonstrara si hubiessen mas triangulos.

En segundo lugar digo, que pues los triangulos ABC, GHI, son semejantes; tendràn la razon duplicada de sus lados homologos (19.) y lo mesmo los otros dos, cada uno de los suyos: luego como el triangulo ABC, à GHI, assi los tres iguales al Poligon BED; seràn à los tres del poligon MHL.

En tercer caso digo, que pues los triangulos se hàn demonstrado tener la razon duplicada de sus lados homologos; y que assi mismo està cada uno en la mesma razon con su poligon, estaràn tambien los poligones en razon duplicada de sus lados homologos. Luego los poligones &c.

COROLARIO.

Por esta demonstracion es manifiesto, que si tres rectas son proporcionales, como la primera fuere à la tercera, assi el Poligon, descrito sobre la primera, serà al poligon descrito semejante y semejantemente sobre la segunda, respecto que se ha demonstrado, que los poligones son entre si en duplicada razon de sus lados homologos.

THEO-

Theorema Proposicion XXI.

Las figuras rectilineas, que son semejantes à una tercera, son semejantes entre si.

Esta consta de la *(11.)* del quinto; y del primer axioma.

Theorema Proposicion XXII.

Si quatro ò mas lineas son proporcionales, lo seràn tambien los poligones semejantes, y semejantemente descritas sobre ellas: y si lo son los poligones, lo seràn las lineas;

Sean propuestas *(en la fig. 19.)* AB, à DC, como EF, à GH; digo, que qualesquieras poligones descritos sobre las primeras, como Z, X, seràn proporcionales à los semejantes y semejantemente descritos sobre las segundas, como MF, NH. Sea hallada à las primeras la tercera proporcional P, y à las segundas la tercera Q *(11.)*

Demonstracion. Porque AB, es à CD, como EF, à GH; y CD, à su tercera proporcional P, como GH, à la suya Q: serà en razon igual AB, à P, como EF, à Q *(11.)* y siendo Z, à X, en la razon de AB, à P, duplicada de la de AB, à CD; y la del poligone MF, à NH, en razon duplicada de EF, à GH; será en razon igual Z, à X, como MF, à NH.

Digo en segundo caso, que respecto de estar los poligones en razon duplicada del lado del uno à el del otro *(19. y 20.)* estaràn estos en razon subduplicada, y por consequencia seràn proporcionales. Que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XXIII.

Los paralelogramos equiangulos, tienen la razon compuesta de la de sus lados.

Sean *(en la fig. 20.)* los paralelogramos L, M, los quales siendo equiangulos, se podràn unir por dos angulos iguales de suerte, que CDE, sea una linea recta, como tambien BDF, *(14. y 15. l. 1.)* digo, que estos paralelogramos tendràn la razon compuesta de la de sus lados, esto es compuesta de la de CD, à DE, y de BD, à DF, acavase el paralelogramo N.

Demonstracion. El paralelogramo L, es à N, como la basa CD, à DE, *(1.)* y por la mesma serà N, à M, como la basa BD, à DF; conque la razon de L, à M (que seràn las extremas) serà compuesta de las razones de L, à à N, y de N, à M, (*d. 5.*) que son las del medio, que se han demonstrado en igual razon à la de CD, à DE, y de BD, à DF; luego de estas estarà compuesta la razon de L, à M: que es lo que se devia demonstrar.

Pratica por numeros porque esta demonstracion parece algo difficil me parescio explicarla tambien por numeros, para mas claridad, y assi suponiendo que CD, tiene 9. pies BD, 4. DF, 8: y DE, 3. serà el area de L, 36. y la de M, 24: y assi la razon de aquella à esta serà la de 36. à 24. resta ahora saver que esta razon està compuesta de la que ay de CD, 9. à DE, 3. y de la de BD. 4. à DF, 8. pues ponganse los 4. terminos en esta forma $\frac{9}{3}$. $\frac{4}{8}$ *y multiplicando los nominadores de harriva uno por otro, haràn 36. y los de abaxo 24. y assi diremos que la razon de 36. à 24. es compuesta de las razones de 9. à 3. y de 4. à 8. que es lo que se ha querido declarar.*

Theorema Proposicion XXIV.

Los Paralelogramos que estàn al rededor del diametro, con un angulo comun con el total, son semejantes entre si, y cada uno al total.

Sean (*en la fig. 1. Estampa 9.*) los paralelogramos EF, GH, que estàn al rededor del diamemetro BD, del paralelogramo AC, con el angulo comun en B; digo, que seràn semejantes entre si, y cada uno al mayor.

Demonstracion. Porque los triangulos B D C, B I F, tienen el angulo en B, comun, y la basa IF, paralela à D C (por suposicion) tendràn sus angulos en F, y C, iguales (*29. l. 1.*) y assi seràn equiangulos (*32. l. 1.*) y serà B F, à F I, como B C, à C D; luego seràn semejantes los triangulos (*d. 1.*) y siendo estos mitades de los paralelogramos A C, E F (*34. l. 1.*) seràn tambien estos semejantes. Y lo mesmo se demonstrarà del paralelogramo G H; conque los paralelogramos E F, G H, lo seràn entre si (*ax. 1.*) y cada uno al todo. Que es lo que se devia demonstrar.

Problema Proposicion XXV.

Construir un rectilineo semejante, y semejantemente descrito à otro rectilineo dado, y igual à otro propuesto.

Sea propuesto (*en la fig. 2.*) el rectilineo A, al qual se ha de descrivir uno semejante, y semejantemente descrito à otro rectilineo dado, como B, hagase sobre el lado C D, el rectangulo C E, igual à A (*45. l. 1.*) y prolongando C D, azia G; el rectangulo D H, igual

igual à B (*44. l. 1.*) y buscase à C D, y D G, la tercera proporcional I K (*13.*) sobre la qual se descrivirà el rectilineo L, semejante y semejantemente descrito à A (*18.*) digo, que serà igual al dado B.

Demonstracion. Porque las rectas C D, I K, D G, son proporcionales; serà como la primera C D, à la segunda I K, assi el rectilineo A, descrito sobre la primera, es al rectilineo L, descrito sobre la segunda (*c. de la 20.*) y como C D, à D G, assi el paralelogromo C E, quiero dicir A, serà à D H, ò à su igual B (*1.*) luego como A, à B, assi A, à L (*11. l. 5.*) y por consequencia B, y L, seràn iguales (*9. l. 5.*) que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XXVI.

Si dentro de un paralelogramo se descrive otro semejante à el, y que un angulo sea comun à los dos; el diametro del mayor passarà por el angulo del menor, opuesto al comun.

Esta Proposicion consta de la 24. y las de mas hasta la 30. no son necessarias.

THEO-

PROBLEMA PROPOSICION XXX.

Dividir una recta dada, en media y extrema razon.

Sea propuesta la OP *(fig. 1. Estampa 9.)* dividase de suerte que el rectangulo de la toda en la parte PQ, sea igual al quadrado de OQ *(11.l.2.)* y serà la toda OP, à OQ, como esta à PQ, *(17.)* que es lo que se devia hazer.

THEOREMA PROPOSICION XXXI.

En todo triangulo rectangulo el poligone descrito sobre el lado opuesto al angulo recto, es igual à los descritos sobre los lados que le forman, siendo semejantes y semejantemente descritos à el.

Sea el triangulo rectangulo ABC *(fig. 3.)* y su angulo en A, recto; digo, que qualquiera figura BD, descrita sobre BC, serà igual à las dos juntas BG, CH, siendo semejantes y semejantemente descritas à ella.

Demonstracion. Porque las figuras BG, CH, BD, son semejantes, estaràn en razon duplicada de la de sus lados homologos *(20.)* de que se ſe ſigue que eſtaràn en la meſma razon que los quadrados de ſus lados; y eſtando los de B A, A C, juntos en razon de igualdad con el de B C (*47. l. 1.*) las figuras B G, C H, tendràn una meſma con la figura B D (*9. l. 5.*) luego eſta ſerà igual à las dos. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

La 32. no es eſſencial.

THEOREMA PROPOSICION XXXIII.

En los circulos iguales los angulos del centro ò de la circumferencia, ſon entre ſi, como ſus arcos; y lo meſmo los ſectores.

Sean los circulos iguales (*de la fig. 4.*) y que los angulos B D C, F H G, ſean del centro, y B A C, F E G, en la circumferencia: digo en primer lugar que el arco B C, es à F G, como el angulo B D C, à F H G, y aſſi el ſector al ſector.

Eſta demonſtracion excuſo por ſer la meſma que la primera de eſte; ſalvo que ſe ha de uſar de los arcos como allà de las baſas, y en lugar de la 28. del primero, ſe ha de citar la 29. del tercero.

Tambien porque los angulos en la circumferencia A, y E, ſon mitades de los del centro

tro (20. l. 3.) lo mesmo que se ha demonstrado de estos, se demonstrarà de aquellos; luego en los circulos iguales, &c.

COROLARIOS.

1. Por lo demonstrado es manifiesto, que el sector serà al sector, como el angulo al angulo; respecto que una y otra razon es la mesma que la de el arco al arco: luego tendràn una mesma entre si (11. l. 5.)

2. Tambien es evidente, que como un angulo del centro es à 4. rectos, assi el arco que sustiene dicho angulo, es à toda la circumferencia: y al contrario, como 4. angulos rectos son à un angulo del centro; assi toda la circumferencia, es al arco que sustiene dicho angulo.

Aqui se acabò el sexto libro de Euclides; y continuando el orden començado, siguen algunas Proposiciones mias.

PROPOSICION I.

De tres continuas proporcionales dada la ſuma de las extremas, y la media proporcional, ſe pregunta por cada una de las extremas.

Sea la ſuma A B (fig.5.) *y la media proporcional F. Pues deſcrivaſe ſobre la ſuma como diametro el ſemicirculo A D B, y en uno de los extremos del diametro como en A, ſe levantarà A C, perpendicular y igual à la mèdia proporcional F, y tirando C D, paralela à A B* (31. l. 1.) *eſta cortarà la circumferencia en D; y ſe darà de eſte punto D E, perpendicular à A B; digo, que los ſegmentos A E, E B, ſon las dos extremas que ſe piden.*

Demonſtracion. *Porque en el quadrilatero A D, los lados A C, y D E, ſon perpendiculares, terminadas entre unas meſmas paralelas, ſeràn iguales* (a. 11.) *y ſiendolo A C, à F, ſe ſigue que eſta lo ſerà tambien à D E* (a. 1.) *la qual es media proporcional entre A E, y E B* (13. 6.) *luego dichos ſegmentos ſon las extremas que ſe buſcan.*

PROPOSICION II.

De tres continuas proporcionales dada la media, y la differencia de las extremas, hallar cada una de ellas, sin valerse de tirar tangentes à circulo alguno.

Sea (en la dicha fig.) *media proporcional F, y la differencia de las extremas H, igual à su mitad. Sobre qualquiera recta indeterminada E G; y en uno de sus extremos como E, se levantarà E D, perpendicular, y igual à F, y dando D G, se descrivirà con este intervalo y centro G, el semicirculo A D B; digo, que las extremas que se buscan seràn A E, y E B, entre las quales D E, igual à F. es media proporcional* (13.) *cortese G I, igual à G E.*

Demonstracion. *Por semidiametros de un mesmo circulo A G, y G B, son iguales; y quitando à uno y otro, las partes iguales E G, y G I; lo quedaràn tambien A E, I B* (2. 3.) *y siendo E I, igual à toda la differencia H; la qual si se añade à I B, se tendràn las extremas A E, E B, que son las que se buscavan.*

PROPOSICION III.

De tres continuas proporcionales siendo F (*fig. 6.*) la suma de la primera con la mitad de la diferencia de la primera y tercera, y H, la media proporcional entre la tercera y suma de la primera y tercera, se pregunta por las tres continuas.

Sobre una recta indeterminada con el intervalo F, se descrivirà desde G; el semicirculo A D B, acomodando à el la linea H, como de B, à D, y se bajarà del termino D, perpendicular à AB, la D E; digo, que esta serà la media proporcional, y A E, E B, las extremas.

Demonstracion. *Por mi antecedente, E G, es la mitad de la diferencia entre A E, y E B; de que se infiere, que A G, serà igual à la suma de la primera A E, con la mitad de la diferencia de la primera y tercera, como lo es su igual F; y tambien B D, igual à H, es media proporcional entre la tercera E B, y la suma de las extremas A B (c. 8.) luego seràn las continuas A E, D E, y E B; que es lo que se ha pedido.*

COROLARIO.

Por esta demonstracion es manifiesto, que si el lado del quadrado igual à los quadrados juntos, de la media proporcional y mitad de la diferencia de las extremas, fuere conocido, y la media proporcional entre la tercera, y la suma de las extremas, que seràn conocidas las continuas; porque siendo AG, igual de DG, *(d. 15. l. 1.)* y el quadrado de esta igual al quadrado de DE, y EG *(47. l. 1.)* se podrà construir la figura como se ha dicho.

PROPOSICION IV.

De tres continuas proporcionales siendo P, (*fig. 7.*) media entre la tercera y la suma de esta con la primera, y assimismo, suma de dos extremas cuya media proporcional es Q, se pregunta por las dichas tres continuas.

En una recta se tomarà B D, igual à P; y sobre ella se descrivirà el semicirculo B E D, y por mi primera se buscaràn los segmentos, D O, *BO,* *BO, con la media proporcional Q, que serà EO; y dando DE, y la BE, indeterminada serà BED, angulo recto* (31. l. 3.) *y levantando sobre DB, la BA, perpendicular hasta cortar la DE, en A, se tendràn las tres continuas que se buscan, que son AE, EB, y ED.*

Demonstracion. *Porque en el triangulo ADB, el angulo en B, es recto, serà EB, media proporcional entre AE, y ED* (c. de la 8.) *y por el mesmo, DB, igual a P, es media proporcional entre la tercera ED, y suma de esta con la primera AE; y EO, igual de Q, media proporcional entre BO, y OD: de forma que las tres continuas pedidas son las dichas.*

Infierese de esta Proposicion que si de 3. continuas se tuviere la suma de las extremas, y la media proporcional entre ella, y la primera ò tercera; que seràn conocidas las 3. porque descriviendo sobre la suma un semicirculo y acomodando à el la media proporcional, es facil lo demas.

PROPOSICION V.

De quatro proporcionales dada la primera L, y quarta K *(fig. 8.)* se pregunta si geometricamente se podràn hallar la segunda y tercera, de modo que esta sea segunda de otras 4. donde la quarta dada sea tambien quarta, y assimismo que dicha tercera sea media proporcional entre la quarta y una de sus partes?

Digo que se hallaràn assi. Sobre una recta A F, igual à K, se descrivirà el circulo A B F C; y del termino F, se acomodarà la, L, à la circumferencia como de F, à H (1. l. 4. *) y dando A H; del punto A, se cortarà igual à L, la A G; por cuyo punto se darà perpendicular à ella B C, que corte en estos puntos la circumferencia para tirar las rectas A B, A C, F C; y en conclusion digo, que tirando de C, la C E, perpendicular al diametro, que se tendràn A G, primera, A B, segunda, A C, tercera, y A F, quarta, siendolo esta tambien, donde la C F, es tercera, A C, segunda (que antes fue tercera) y C E, primera.*

Demonstracion. *Los triangulos A B G, A F C,* te-

teniendo sus angulos B, y F, en un mesmo segmento seràn iguales (31. l. 3.) *y siendolo en G, y A C F, rectos* (este por la 31. l. 3.) *y aquel* (por construcion) *tendràn sus angulos en A, iguales* (32. l. 1.) *de que se sigue que los triangulos seràn proporcionales; y assi por la quarta serà A G, primera, à A B, segunda, como A C, tercera, à A F, quarta, y por la* (8.) *la perpendicular C E, dividio el triangulo A C F, en dos equiangulos, que cada uno lo es al todo; conque* (por la 4. citada) *serà A F, quarta à F C, tercera como A C, segunda à C E, primera: luego, la A F, es quarta donde A C, es tercera, y lo mesmo donde fue segunda; y assimismo esta es media proporcional entre dicha quarta A F, y su parte A E* (c. 8.) *como se ha pedido.*

PROPOSICION VI.

De quatro proporcionales siendo H, (*fig. 9.*) media proporcional entre las dos extremas, y K, diferencia de la segunda y tercera, hallar las quatro proporcionales.

Para esta se descrivirà sobre una recta igual à K, el circulo E D F, y levantando al diametro de su extremo D, la perpendicular, D A, igual *à H: se darà por el centro L, la A F, sobre la qual se descrivirà el semicirculo A G F, y del termino E, se levantarà E G, perpendicular à A F, y dando A G, F G; se prolongarà A F, al infinito; y de F, como centro con el intervalo de F G, se descrivirà el circulo C G B; digo, que las quatro proporcionales seràn A C, primera, A E, segunda, A F, tercera, y A B, quarta.*

Demonstracion. *Porque D A, es perpendicular al semidiametro D L; serà tangente* (c. 16. l. 3.) *y* (por la 36.) *del mesmo su quadrado es igual al rectangulo de A E, en A F, como* (por la 31. del citado) *el angulo A G F, recto: y siendo A G, media proporcional entre las mesmas A E, y A F* (c. 8.) *serà su quadrado igual al rectangulo de estas dos* (17.) *y assi A G, serà igual à A D* (a. 1.) *ò à su igual H: y porque A G, es perpendicular al semidiametro F G, serà tangente à su circulo, y su quadrado igual al rectangulo de A C, primera, en A B, quarta, y por consequencia media proporcional entre estas dos; y porque el mesmo quadrado de A G, se ha monstrado igual al rectangulo de A E, en A F, serà este igual al de A C, en A B* (a. 1.) *luego* (por la 16.) *seràn las 4. lineas proporcionales, quiero dicir A C, primera, A E, segunda, A F, tercera, y A B, quarta. siendo la differencia de la segunda y tercera, E F, igual à K, que* (por construcion) *es igual al diametro del circulo*

E D F,

E D F: conque se havràn hallado las 4. proporcionales con las circunstancias pedidas.

PROPOSICION VII.

Dado qualquier àngulo rectilineo agudo como A *(fig. 10.)* que sus lineas sean indeterminadas, hallar sobre ellas quatro continuas proporcionales donde la recta M, sea la quarta como assimismo differencia de la primera y tercera de otras tres continuas donde la primera de las 4. sea tambien primera, sin que para ello se pueda tirar linea paralela à otra por construcion.

Hagase en primer caso (para no confundir la figura) el àngulo G C D, igual al dado A (23. l. 1.) y cortando C D, igual à M, sobre ella como diametro, se descrivirà el circulo G D C, que cortarà la C G, en un punto como en G, de cuyo termino se darà G D, y perpendicular a C D, la G E, y de este punto sobre C G, la perpendicular E O; digo, que las quatro continuas seràn C O, C E, C G, y C D.

Demonstracion. *Porque en el triangulo D G C, el angulo en G, es recto (31. l. 3.) y la G E, perpendicular à D C; dividirà esta el triangulo en* *dos triangulos ſemejantes entre ſi, y cada uno al mayor (8.) y por la meſma ſiendo en el triangulo E C G, el angulo en E, recto, le dividirà la perpendicular E O, en triangulos ſemejantes; de que ſe ſigue que ſerà (*por la 4.*) C O, primera, à C E, ſegunda como eſta meſma à C G, tercera, y aſſi ella à C D, quarta quiero dicir à ſu igual M.*

Para el ſegundo caſo digo, que ſobre C D, prolongada, ſe cortarà C H, igual à C O, y deſcriuiendo el ſemicirculo I K H, ſe daràn à la interſecacion K, la K I, y K H; digo, que la dicha quarta C D, ſerà la differencia de la primera y tercera, de tres continuas, donde la primera de las 4. es tambien primera.

Demonſtracion. *En el triangulo I K H, el angulo en K, es recto (*31. l. 3.*) y ſiendo K I, ſemidiametro del circulo C G D. ſerà H K, tangente à dicho circulo (*c. de la 16. l. 3.*) y ſu quadrado igual al rectangulo de C H, en H D; y por conſequencia media proporcional entre eſtas 2 (*17.*) luego ſiendo H C, primera (igual à C O) H K, ſegunda y H D, tercera, ſerà C D (*antes *quarta) la differencia de la primera y tercera de eſtas tres; y aſſi havremos hallado las 4. y las 3. continuas con los requiſitos pedidos.*

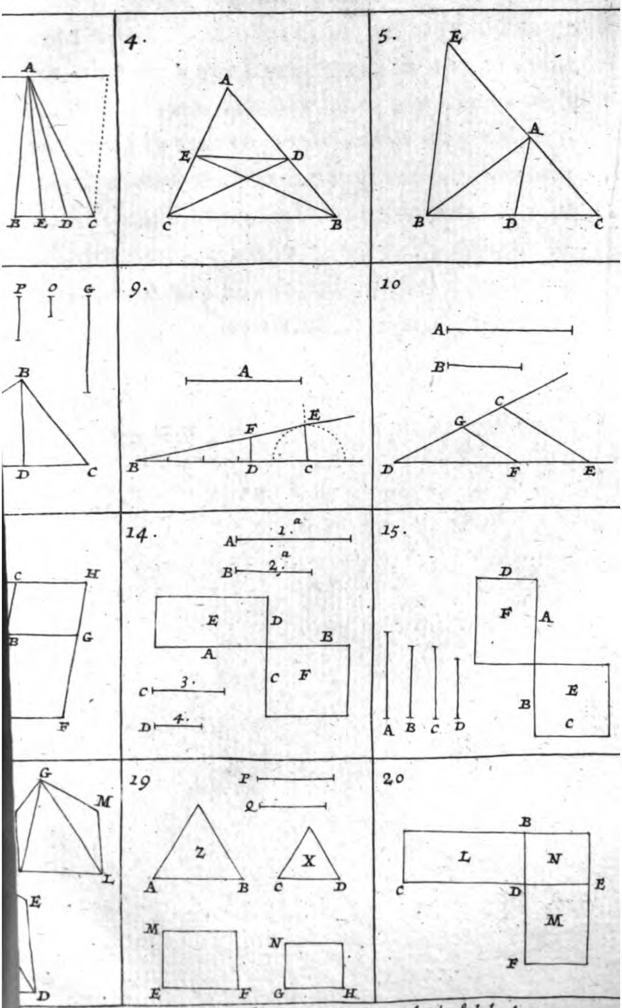
No ſerà queſtion de menor conſequencia el dar conocida la quarta C D; y D G, media proporcional entre la quarta y la D E, differencia de *de la quarta y segunda, y pedir las 4. continuas; que para responder serà necessario de descrivir el circulo sobre C D, y acomodar à el la D G, y de G, bajar la perpendicular G E, y haviendo tirado C G, levantar à ella de E, la perpendicular E O, à que se siguirà la dicha demonstracion.*

*Pudiera amplificar estas questiones con otras muchas y assi mismo con la reduccion de unas figuras rectilineas en otras pero lo escuso por no dilatar este discurso; si bien para lo ultimo me valdrè de un exemplo que servirà para las demas y sea la de reducir un quadrado à un triangulo equilatero, pues tomese qualquier equilatero, y reduciendole por (*la 14. l. 2.*) à un quadrado. se buscara (*por la 12.*) una quarta proporcional que sea al lado del equilatero como el de su quadrado, à el de el quadrado dado, y allada, y descripto sobre ella un triangulo equilatero; serà por la (22.) igual al quadrado dado. Y assi de los demas como de pentagonos, &c. porque dado caso que sea de un pentagono à otra figura serà facil de acerlo, valiendose primero de la (14. del segundo) para reducirle à quadrado.*

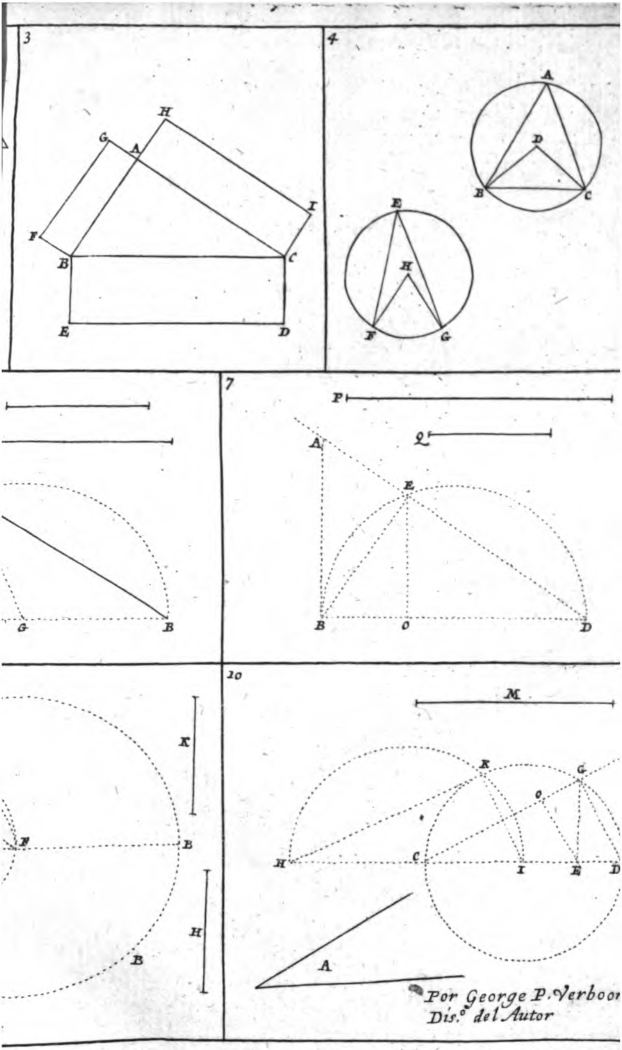
Porque creo haver dado sufficiente materia, paraque los aplicados, puedan usar y aprovecharse de los seis primeros libros de Euclides (cosa que no han usado mucho los otros

otros Autores en sus traducciones) me contentarè con lo dicho, passando à tratar del Libro onzeno, advirtiendo aqui como el septimo y los demas dexo, porque es cosa que pertenece à los grandores incommensurables que requieren la Algebra; la qual se halla hoy en estilo mas claro y comprensible y por mas breve camino, à que llaman la Algebra speciosa ò Analitica.

8.[a]



Por el Alferes Dn. Lorenzo Beltrand Discº. del Autor


3
H
G
A
I
F
B
C
E
D
4
A
D
B
C
E
H
F
G
B
G
7
P
Q
A
E
B
O
D
K
F
B
H
B
10
M
K
G
O
H
C
I
E
D
A
Por George P. Verboom
Dis.o del Autor

LIBRO SEPTIMO.

Que es el onzeno de Euclides.

EN este Libro trata Euclides de los principios fundamentales de los solidos, los quales nos dan luz para muchas de las partes de las Mathematicas, como de la Sphera, Trigonometria Spherica, Statica, y otras. Y finalmente nos es util para la tercera parte de la Geometria practica ò Stereometria, que trata de medir lo solido de qualquier cuerpo.

DEFINICIONES.

1. Solido ò cuerpo es una cantidad que tiene latitud, longitud, y profundidad.

2.

2. Los terminos del cuerpo ſolido ſon ſuperficies.

3. Una linea recta es perpendicular à un plano, quando lo fuere à las rectas que tocare en el meſmo plano.

Como ſi (en la fig. 1. Eſtampa 10.) *en el plano CD, la AB, haze angulos rectos con las rectas CD, EF, que en tal caſo ſerà perpendicular à dicho plano.*

4. Un plano es perpendicular à otro, quando las rectas tiradas en el uno à la comun ſeccion, hazen con ella angulos rectos, ſiendo tambien perpendiculares al otro.

Como ſi ſobre el plano AB (fig. 2.) *las rectas DE, FB, cahyendo ſobre la comun ſeccion AB, hazen con ella angulos rectos, ſiendo perpendicular al plano AB; que en tal caſo, ſerà eſte perpendicular al otro.*

5. El angulo de la inclination de una recta en un plano, es el agudo, que haze en el, la recta, con otra tirada en

en el plano del extremo de la recta à el, de la perpendicular que cahe de su vertice en el plano.

Exemplo en el plano D C (fig. 3.) *sobre el qual la recta A B, no cahe perpendicular; digo, que si del extremo A, cahiesse sobre el plano la perpendicular A E; y se diese la recta E B, que el angulo A B E, serà el de la inclinacion que hace la A B, en dicho plano.*

6. La inclination de un plano à otro, es el angulo agudo, que forman las perpendiculares que de uno y otro plano se tiran à la comun seccion.

Como (en la fig. 4. *) la inclination del plano A B, al plano A D, que no es otra, que la del angulo B C D, comprehendido de las rectas B C, C D; que cada una en su plano, es perpendicular à la comun seccion A E.*

7. Los planos tienen semejante inclinacion à otros, quandò sus angulos de inclinacion son iguales.

8. Planos paralelos son aquellos que prolongados por uno y otro lado, no con-

concurren jamas: ò que igualmente eſtàn apartados uno de otro por todas partes de una meſma diſtancia.

9. Solidos ſemejantes ſon los terminados, de igual numero de ſuperficies ſemejantes.

10. Semejantes y iguales ſolidos ſon aquellos, que eſtàn terminados, de igual numero de ſuperficies iguales y ſemejantes.

11. Angulo ſolido es el concurſo ò inclinacion de mas de dos rectas en un punto, que eſtàn en diverſos planos.

De otra manera. Angulo ſolido es el que ſe forma de mas de dos angulos planos que eſtàn en diferentes planos. Y ſi ſon iguales pueſto el uno en el otro convendràn: y ſi convienen ſeràn iguales.

12. Piramide es una figura ſolida terminada de diverſos planos, que ſaliendo de los extremos de otro que tienen por baſa, van à concurrir en un punto.

13.

13. Prisma es una figura solida que tiene por terminos dos planos paralelos, semejantes y iguales, y los otros paralelogramos.

14. Sphera es una figura solida constituida de la revolucion de un semicirculo al rededor de su diametro, acavando donde se empezò à mover.

Otros la definen diciendo, que Sphera es un cuerpo solido perfectamente redondo, terminado de una sola superficie, que tiene un punto en su mediania dicho centro, y quantas lineas salen de el y tocan la superficie, son iguales.

15. El Exe de la Sphera es el diametro fixo, al rededor del qual se mueve y haze su revolucion el semicirculo.

16. El Centro de la Sphera es el mesmo que el del semicirculo que descrive la Sphera.

17. Diametro de la Sphera, es qualquiera recta que passando por el centro se terminan sus extremos en la superficie.

18. Cono es una figura ſolida conſtituida de la revolucion entera de un triangulo rectangulo, al rededor de uno de los lados que forman el angulo recto, quedando eſtè fixo: el qual ſi es igual al otro lado que forma con el dicho, angulo recto, el Cono ſerà rectangulo (en el vertice) ſi menor Ambligonio, y ſi mayor oxigonio.

19. El Exe del Cono, es la perpendicular al rededor de la qual haze ſu revolucion.

20. Baſa del Cono es el circulo deſcrito por la recta que forma angulo recto con el Exe.

21. Cylindro es una figura ſolida conſtituida de la revolucion entera de un paralelogramo rectangulo, al rededor de uno de ſus quatro lados, eſtando aquel fixo.

22. El Exe del cylindro es la recta immobil, ſobre que haze la revolucion el paralelogramo.

23.

23. Las basas del cylindro son los circulos descritos por los otros dos lados opuestos del paralelogramo.

24. Conos y Cylindros semejantes son aquellos, cuyos exes y semidiametros de sus basas tienen entre si una mesma razon.

25. Cubo ò Exaedro es una figura solida, terminada de seis superficies quadradas y iguales.

26. Tetraedro, es una figura solida, terminada, de quatro triangulos iguales y equilateros.

27. Octaedro es una figura solida, terminada de ocho triangulos iguales, y equilateros.

28. Dodecaedro es una figura solida, terminada de doze Pentagonos, iguales, equiangulos, y equilateros.

29. Icosaedro es una figura solida, ter-

minada de veinte triangulos equilateros y iguales.

30. Paralelepipedo es una figura solida terminada de seis planos quadrilateros siendo los opuestos semejantes, iguales, y paralelos.

31. Figura solida inscripta, es la que con todos sus angulos toca los de la solida circunscripta ò bien sus lados ò planos.

32. Figura solida circunscripta, es la que contiene à la solida inscripta en la forma dicha en la definicion antecedente.

Theorema Proposicion I.

Vna linea recta no puede tener una parte suya en un plano, y otra en el ayere.

Esto es manifiesto por si. Porque siendo la linea supuesta recta, haviendo una parte en un plano, y otra levantada en el ayere, seràn dos lineas que forman un angulo, y por consequenquencia no serà linea recta: lo que es contra el supuesto. Luego una linea, &c.

THEOREMA PROPOSICION II.

Todas las partes de un triangulo, estàn en un mesmo plano, como las rectas que se cortan.

El primer caso, consta de la antecedente: porque el triangulo no es otra cosa que una superficie plana terminada de tres lineas rectas. De que se infiere tambien la demonstracion del segundo caso.

THEOREMA PROPOSICION III.

Si dos planos se cortan, su comun seccion serà una linea recta.

Sean los planos AB, CD *(de la fig. 5.)* que se cortan en E, y F; digo, que su comun seccion EF, es una linea recta. Si se niega: tirese en el un plano si es possible la recta EGF, y en el otro FHE, las quales encerreràn espacio lo que implica *(a. 12.)* luego la comun seccion de dos planos que se cortan es una linea recta.

Theorema Proposicion IV.

La recta perpendicular à dos rectas que se cruzan, es tambien perpendicular al plano en que estàn.

Cruzense las dos rectas C X, F S *(fig. 6.)* en A; digo, que si la B A, es perpendicular à ellas, que lo serà al plano en que estàn, y si se niega serà alguna otra como B Q, perpendicular al plano A C F, tirese A Q, en el plano F A C; y en el punto Q, levantese la perpendicular Q O *(11. l. 1.)* que prolongada encontrarà alguna de las rectas C X, F S, ò à entrambas *(a. 11.)* (y aunque el punto Q, sea qualquiera otro) enquentrese pues A C, en O: y tirese B O.

Demonstracion. El angulo B A O, es recto (por suposicion) y assi el quadrado de B O, serà igual al quadrado de B A, y A O *(47. l. 1.)* pero porque B Q, se supone ser en angulo recto al plano F A C; y que por consiguiente hace con A Q, el angulo recto B Q A (*d. 3.*) serà el quadrado de B A, igual à los quadrados de B Q, y A Q *(por la mesma 47. l. 1.)* y por quanto el angulo A Q O, es recto (por construcion) serà el quadrado de A O, igual à los quadrados de O Q, A Q; de modo, que solo el qua-

dra-

drado de BO, serà igual à los quadrados de BQ, OQ, y à AQ, dos vezes. De que se infiere que el solo quadrado de BO, es mayor que el agregado (ò suma) de los quadrados de BQ, OQ; excediendole en el duplo del quadrado de AQ; y por consiguiente OQ, no encuentra à BQ, en angulo recto; luego BQ, no es perpendicular al plano CAF (*d. 3.*) y lo mesmo se demonstrarà de qualquiera otra que no fuera AB: siguese que por fuerza BA, es perpendicular al plano en que estàn las rectas que se cruzan.

Theorema Proposicion V.

Si una linea es perpendicular à otras tres en un mesmo punto, estaràn las tres en un mesmo plano.

Sea en la (*fig. 7.*) la perpendicular RA, à las tres lineas AF, &c. Digo, que estas estaràn en un mesmo plano. Y si no fuere assi, alguna estarà en otro; y sea en lugar de la AO, la AB, en el plano RO.

Demonstracion. Porque RA, es perpendicular à AC, AF; serà perpendicular à su plano (4.) y siendo RA, perpendicular à AO (*d. 3.*) y por el supuesto lo es tambien à AB; se sigue que los angulos RAO, RAB, serian

rian rectos, y iguales *(a. 10.)* lo que implica siendo uno parte del otro; luego las tres rectas estàn en un mesmo plano: que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION VI.

Las lineas que son perpendiculares à un mesmo plano, son paralelas entre si.

Sean las lineas AB, CD, *(fig. 8.)* perpendiculares al plano EF, tiradas de los puntos B, y D; digo, que seràn paralelas, tirese la recta BD, en el plano EF; los angulos ABD, BDC, seràn rectos; *(4.)* y sea tirada en el dicho plano la DG, perpendicular à BD *(11. l. 1.)* y igual à AB: y en fin se tiraràn BG, GA, y AD.

Demonstracion. Porque en los triangulos BAD, GDB, los lados AB, BD, son iguales à los lados GD, DB, cada uno al suyo (por construcion) y sus angulos en B, y en D, iguales; los lados AD, GB, seràn tambien iguales *(4. l. 1.)* y siendo en los triangulos ABG, GDA, los lados GD, DA, iguales à los lados AB, BG, cada uno al suyo, y el lado AG, comun; los angulos ABG, GDA, seràn iguales *(8. l. 1.)* pero ABG, es recto *(d. 3.)* siguese que GDA,

lo

lo ſerà tambien ; y ſiendo por la meſma el angulo GDC, recto, la GD, formarà angulos rectos con las tres rectas BD, DA, y DC; luego dichas tres rectas ſeràn en un meſmo plano (*5.*) quiero decir que CD, ſerà en el plano conſtituido de DB, DA, (*2.*) y AB, eſtà en el meſmo plano de DB, DA; conque CD, AB, eſtaràn en un meſmo plano: y ſiendo los angulos internos en B, y D, rectos AB, CD, ſeràn paralelas, *(28. l. 1.)* que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion VII.

Si dos rectas paralelas eſtuvieren en un plano, y de qualquier punto de la una, ſe tirare una recta à qualquier punto de la otra, la tal recta eſtarà en el meſmo plano.

Sean en la *(fig. 9.)* las paralelas CD, AB, que eſtàn en un meſmo plano; digo, que tomando un punto en cada una como C, y B, y tirada la recta CB, que eſtarà en el meſmo plano que las paralelas, y de no ſer eſto aſſi, eſtarà en otro plano; el qual demos que corte el de las paralelas en los puntos C, y B.

Demonſtracion. Porque no ſe quiere que CB, eſtè

eſtè en el plano de las paralelas, no ſerà la comun ſeccion de los planos que ſe cortaron, y aſſi lo ſerà otra, y ſealo B E C, la qual ſerà linea recta *(3.)* de que ſe infiere que las dos rectas B C, y B E C; teniendo unos meſmos terminos, encereràn eſpacio, lo que implica *(a. 12.)* luego ſi dos rectas &c.

SCHOLIO.

Siguese de esta Proposicion, que aunque las lineas no fueran paralelas, estando en un mesmo plano que ſuccederà lo meſmo.

Theorema Proposicion VIII.

Si de dos lineas paralelas la una es perpendicular à un plano, la otra lo ſerà tambien al meſmo plano.

Eſta propoſicion conſta de la 6.

Theorema Proposicion IX.

Las lineas paralelas à una meſma, ſon paralelas entre ellas, aunque no eſtén en un meſmo plano.

Si *(en la fig. 10.)* las lineas A B, C D, ſon pa-

paralelas à la linea. EF, feràn paralelas entre si: tirese en el plano de las lineas AB, EF, la HG, perpendicular à AB *(11. l. 1.)* que lo serà tambien à EF *(29. l. 1.)* y en el plano de las lineas EF, CD; la HI, perpendicular à EF: y assi mismo lo serà à CD.

Demonstracion. Siendo la linea EH, perpendicular à las lineas HG, HI; lo serà à su plano *(4.)* y por la precedente las lineas AG, CI, lo son tambien: luego *(por la 6.)* seràn paralelas. Que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion X.

Si dos rectas que concurren en un plano son paralelas, à dos que concurren en otro, formaràn angulos iguales.

Si *(en la fig. 11.)* AB, es paralela à CD, y AE, à CF, aunque en diversos planos; los angulos BAE, DCF, seràn iguales. Haganse las lineas AB, CD; AE, CF; iguales; y tirense las lineas BE, DF, AC, BD, y EF.

Demonstracion. Porque las lineas AB, CD, se han supuesto paralelas y iguales, lo seràn AC, BD *(33. l. 1.)* como assimismo AC, FE, y *(por la precedente)* BD, y EF, lo seràn entre si, y *(por la dicha 33.)* BE, y DF, D F, lo seràn tambien; luego los triangulos B A E, D C F, que tienen todos sus lados iguales, cada uno al suyo, tendràn los angulos en A, y en C, iguales *(8. l. 1.)* que es lo que se devia demonstrar.

Problema Proposicion XI.

Tirar una perpendicular à un plano, de un punto dado fuera de el.

Sea propuesto *(en la fig. 12.)* el punto C, del qual se quiere tirar una perpendicular al plano A B; dese en el, qualquiera recta E D, y à esta, del punto C, la perpendicular C F *(12. l. 1.)* y F G, perpendicular à E D *(11. l. 1.)* y C G, à F G; digo, que C G, serà perpendicular al plano A B. Dese G H, paralela à F E *(31. l. 1.)*

Demonstracion. Porque la linea E F, es perpendicular à las lineas C F, F G; lo serà al plano C G F *(4.)* y haviendose tirado H G, paralela à E F, serà tambien perpendicular al mesmo plano *(8.)* y por la mesma, siendo C G, perpendicular à las lineas G F, G H, lo serà al plano A B: lo que se ha pedido.

PROBLEMA PROPOSICION XII.

Levantar una perpendicular à un plano, de un punto dado en el.

Sea propuesto el plano A B *(de la fig. 13.)* y en el, el punto C, del qual se ha de levantar la perpendicular, tomese qualquier punto fuera del plano, como E, y tirese de el, la perpendicular E D *(11.)* y del punto C, la C F, paralela à E D *(31. l. 1.)* digo, que esta serà la perpendicular que se ha pedido *(8.)*

THEOREMA PROPOSICION XIII.

A un mesmo plano no se pueden tirar dos perpendiculares, de un mesmo punto, dado fuera de el, ò en el.

Si de un punto se pudieran dar à un mesmo plano dos perpendiculares; serian paralelas *(6.)* lo que implica *(d. 35. l. 1.)* Luego à un mesmo plano, &c.

THEO-

Theorema Proposicion XIV.

Los planos à los quales una mesma linea es perpendicular, son paralelos entre si.

Sean los planos B D, A C (*fig. 14.*) y perpendicular à ellos la B A: tirese de qualquier punto del plano B D, y sea de D, hasta el otro plano la D C, paralela à A B (*31. l. 1.*) y dense las rectas B D, y A C, que formaràn angulos rectos con dichas paralelas (*d. 3.*) y assi (*por la 28. l. 1.*) seràn paralelas; y lo mesmo succederà con otra qualquiera paralela que se tirare à la perpendicular A B; luego los planos donde estas estàn, distaràn igualmente uno de otro, y por consequencia seràn paralelos (*d. 8.*) que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XV.

Si dos lineas que se encuentran en un plano, son paralelas à dos que se encuentran en otro, sus planos seràn paralelos.

Sea el plano B C (*fig. 15.*) donde las rectas A B, A C, son paralelas à F D, D E, del plano F E; digo, que los planos F E, B C, seràn paralelos; dese del punto A, la A I, perpenpendicular al plano F E *(11.)* y G I, paralela à F D, como H I, à D E *(31. l. 1.)* las quales lo seràn à A B, y A C *(9.)*

Demonstracion. Porque las lineas A B, G I, son paralelas *(9.)* y los angulos A I G, A I H, rectos; lo seràn los angulos I A B, I A C, *(27. l. 1.)* y assi la A I, serà perpendicular al plano B C *(4.)* y siendolo tambien al plano F E; se sigue que los planos B C, E F, seràn paralelos *(14.)* que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XVI.

Si à dos planos paralelos, los cortare otro; las comunes secciones seràn paralelas.

Sean los planos paralelos A C, B D *(fig. 16.)* que los corte el plano A B; digo, que las rectas A F, E B, seràn paralelas: porque de no serlo, concurriràn siendo prolongadas, y supongamos que lo hazen en G.

Demonstracion. Porque toda la recta F A G, està en un mesmo plano, como en A C, prolongado *(1.)* y lo mesmo toda la recta B E G, en su plano prolongado; los planos se encontraràn en G; lo que es contra la *(d. 8.)* y la suposicion; luego si dos planos &c.

THEO-

Theorema Proposiçion XVII.

Si à dos rectas las cortàn planos paralelos; las cortaràn proporcionalmente.

Si (*en la fig. 17.*) las rectas A B, D C, se cortan con los planos paralelos B D, F E, y A C, digo que A E, serà à E B, como C F, à F D; tirese la recta A D, como tambien A C, E F, y B D.

Demonstracion. Porque el plano del triangulo A B D, corta los tres planos paralelos, las rectas B D, E F, seràn paralelas (*16.*) y por la mesma razon lo seràn A C, E F; y (*por la 2. l. 6.*) A G, serà à G D, como C F, à F D; y A G, à G D; como A E, à E B. Luego (*por la 11. l. 5.*) como C F, à F D; assi A E, serà à E B. Que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XVIII.

Si una recta es perpendicular à un plano; todos los planos en la qual se hallare esta, seràn perpendiculares al mesmo plano.

Sea (*en la fig. 18.*) la recta A B, perpendicular al plano E D; digo, que todos los planos en en los quales se hallare, seràn perpendiculares al plano E D; hallese por exemplo, en el plano A E, que corte el plano E D; tirese la E D, perpendicular à la comun seccion F I *(11. l. 1.)*

Demonstracion. Porque los angulos A B I, B I F, son rectos A B, F I, seràn paralelas *(28. l.)* y *(por la 8. de este)* F I, serà perpendicular al plano E D; y assi el plano A E, lo serà à E D *(d. 4.)* Y lo mesmo se demonstrarà de qualquier otro plano que passarè por la perpendicular A B. Luego si una recta, &c.

Theorema Proposicion XIX.

Si dos planos que se cortan son perpendiculares à otro, su comun seccion serà perpendicular al mesmo plano.

Sean *(en la fig. 19.)* los planos A O, C D, que se cortan, perpendiculares al plano I K; digo, que su comun seccion E F, es tambien perpendicular al plano I K; y si no lo fuere, tirese en el plano A B, del punto de la comun seccion F, una perpendicular à la comun seccion F D, y del mesmo punto F, en el plano A O, otra *(11. l. 1.)*

Demonstracion. Porque del punto F, se levantò una perpendicular à la comun seccion F D, y del mesmo punto otra à F O, esta serà

per-

perpendicular al plano I K (4.) y porque de un mesmo punto no se puede tirar mas de una perpendicular à un plano (13.) la recta que en el punto F, es perpendicular al plano IK, serà en el plano A O, y tambien en el plano C D; de que se sigue que la perpendicular E F, serà la comun seccion de los planos A O, C D, y esta se ha monstrado perpendicular al plano I K. Luego si dos planos que se cortan, &c.

THEOREMA PROPOSICION XX.

Si un angulo solido està compuesto de tres angulos planos, dos de aquellos juntos de qualquier manera que se tomen, son mayores que el tercero.

Sea (*en la fig. 20.*) el angulo solido A, compuesto de los angulos planos B A C, B A D, C A D; digo, que los dos tomados juntos, seràn mayores que el tercero; por exemplo, que B A D, C A D, seràn mayores que B A C, hagase el angulo C A E, igual al angulo C A D (*23. l. 1.*) y las lineas A D, E A, iguales: y dense las rectas C E B, C D, y B D.

Demonstracion. Porque los triangulos C A E, C A D, tienen los lados A D, A E, iguales y C A, comun; como tambien los angulos

C A E,

CAE, CAD, iguales, las basas CE, CD, seràn iguales *(4. l. 1.)* pero los lados CD, CB, son mayores que el solo BD *(20. l. 1.)* luego quitando las iguales CD, CE; quedarà la BD, mayor que BE *(a. 5.)* mas los triangulos BAE, BDA, que tienen los lados AD, AE, iguales, y AB, comun; y la basa BD; mayor que EB; tendrà esta su angulo opuesto DAB, mayor que BAE *(25. l. 1.)* y juntando los angulos BAE, CAE; los angulos BAD, CAD, seràn mayores que BAE, CAE; quiero decir que CAB. Que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION XXI.

Todos los angulos planos, que componen un angulo solido, son menores que quatro rectos.

Sea *(en la fig. 20.)* el angulo solido A, digo, que los angulos planos que le forman, seràn menores que quatro rectos: dense las lineas BC, CD, BD; y se tendrà formada una pyramide que tendrà por basa el triangulo BCD.

Demonstracion. Los angulos ABC, ABD, son mayores quel solo CBD *(20.)* y por la misma los dos en C, son mayores que el solo BCD; como los dos en D, mayores que el ſolo B DC; pero todos los angulos del triangulo B D C, ſon iguales à dos rectos (*32. l. 1.*) luego los otros dos en B, y los dos en C, como los otros dos en D; ſeràn mayores que dos rectos. Y porque todos los angulos de los triangulos B A C, B A D, C A D, ſon iguales à ſeis rectos; quitando de ellos mas de dos rectos, quedaràn menos de quatro rectos, por los angulos planos en el punto A. Pero ſi el angulo ſolido fueſſe compueſto de mas de tres angulos planos; de ſuerte, que la baſa de la piramide fueſe poligonal; ſe pudiera dividir en triangulos; y ſe hallarian ſiempre los angulos planos, que forman el angulo ſolido, menores que quatro rectos. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

La Propoſicion 22. y 23. no ſon eſſenciales.

Theorema Proposicion XXIV.

Si un ſolido ſe terminare por planos paralelos; los opueſtos, ſeràn paralelogramos iguales y ſemejantes.

Sea (*en la fig. 21.*) el ſolido A B, terminado de planos paralelos; digo, que los planos opueſtos ſeràn paralelogramos ſemejantes y iguales. Y en primer lugar que ſon paralelogramos.

De-

Demonstracion. Porque el plano FE, corta los dos paralelos AC, BE; las comunes secciones AF, DE, seràn paralelas *(16.)* y *(por la mesma)* DF, y AE: conque AD, serà un paralelogramo *(d. 36. l. 1.)* y por la mesma razon lo seràn AG, FB, y los demas.

En segundo caso digo, que los opuestos son semejantes y iguales, porque siendo las lineas AE, EG, paralelas à FD, DB, y iguales cada una à la suya, los angulos AEG, FDB, seràn iguales *(10.)* y por el mesmo camino puedo demonstrar; que los lados y angulos opuestos en los otros paralelogramos son iguales. Luego si un solido, &c.

Theorema Proposicion XXV.

Si un Paralelepipedo (ò qualquier Prisma) se divide por un plano paralelo à dos de los opuestos que le terminan; los dos solidos en que se dividiere, estaràn en la mesma razon que sus basas, tomando en los prismas por basa un paralelogramo.

Esta Proposicion se demuestra por la mesma via que la primera del sexto y assi la excuso, como tambien la 26. y 27. respecto no ser necessarias en nuestro metodo.

Theorema Proposicion XXVIII.

Si un Paralelepipedo ſe divide por un plano llevado de una diagonal à otra opueſta; ſe dividirà en dos partes ò priſmas iguales.

Sea el paralelepipedo de la (*fig. 22.*) imagineſe paſar derechamente D F, por las lineas D C, F G, haſta llegar à la diagonal G C, digo; que, dejarà dividido el paralelepipedo en dos priſmas iguales.

Demonſtracion. Porque los paralelogramos A F, C B, ſon ſemejantes y iguales, y lo meſmo los paralelogramos A D, y B G (*24.*) y dejando la D F, divididos los paralelogramos B E, H A, cada uno en dos triangulos iguales (*34. l. 1.*) y ſiendo el paralelogramo F C, termino comun en un meſmo plano à los dos priſmas; tendràn eſtos todos ſus terminos ſemejantes y iguales: luego lo ſeràn los priſmas entre ſi (*d. 10.*) que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theo-

Theorema Proposicion XXIX. y XXX.

Los Paralelepipedos que tienen la mesma basa y altura, y que estàn puestos entre planos paralelos, son iguales.

Imaginense *(en la fig. 23.)* los paralelepipedos AFCI, BFOI, constituidos sobre una mesma basa EFIM; y de una mesma altura, quiero decir entre planos paralelos. Si en primer lugar las lineas tiradas de los quatro angulos de la basa, insisten, ò son comprendidos entre los dos planos colaterales ò opuestos EAOM, FGLI; digo, que seràn iguales.

Demonstracion. Los triangulos AEB, CMO, GFH, KIL, son iguales en todo ser *(24. de este, y 8. l. 1.)* como tambien el paralelogramo EH, à su opuesto LM; y AF, à CI *(24.)* como tambien los paralelogramos BG, OK *(36. l. 1.)* conque los prismas AFH, CIL, que estàn terminados de igual numero de superficies iguales y semejantes, seràn iguales *(d. 10.)* y añadiendo à cada uno el comun solido FEBHKCMI; los todos que son los paralelepipedos EKFC, BIOF, seràn iguales *(à. 1.)*

En segundo caso *(que es la 30.)* si las lineas insistentes no son comprendidas entre los mesmos planos colaterales opueſtos; mas ſalen fuera de ellos, como (*en la fig. 1. Eſtampa 11.*) donde los paralelepipedos A F C I, Q F R I, tienen la meſma baſa E F I M; y las rectas F X, E Q; I P, M R, fuera de los planos A M, G I; digo, que ſeràn tambien iguales.

Demonſtracion. Por el ſupueſto arriba las rectas G K, A C; R P, Q X, eſtàn en un meſmo plano, paralelo à el de la baſa E I. Sentado eſto, que las rectas R P, Q X, prolongadas corten la recta G K, en L, y H, y la A C, en O, y B; ſe daràn las rectas E B, M O, F H, I L; y queriendo, ſerà facil de demonſtrar que el ſolido B I O F, tiene los planos que le terminan paralelos y iguales: y por conſequencia que es un paralelepipedo (*d. 30.*) y pues (*por la 29. ò primer caſo*) los paralelepipedos Q I R F, A I C F, ſon iguales; luego los tres lo ſeràn entre ſi (*a. 1.*) que es lo que ſe devia demonſtrar.

S C H O L I O.

Eſta Propoſicion demueſtra en los ſolidos lo que la (35. del. 1.) *en los planos.*

Theo-

THEOREMA PROPOSICION XXXI.

Los paralelepipedos que tienen las basas y alturas iguales, son iguales.

Primeramente, tengan los paralelepipedos los lados perpendiculares à sus basas: prolongese (*en la fig. 2.*) el lado FG, y acavase el paralelogramo GK, que sea igual y semejante à AO (*18. l. 6.*) y haviendo acavado el paralelogramo RM: que las rectas PM, RG, prolongadas encuentren la KH, en Q, y en I; y imaginese haver construido paralelepipedos sobre GK, GQ, y GP, cuyos lados sean perpendiculares à las basas, teniendo todos la S, por altura comun.

Demonstracion. El solido EGS, es al solido GPS, como EG, à GP (*25.*) esto es (porque los paralelogramos EG, y AO, se han supuesto iguales) como AO, à GP; quiero decir (*por construcion*) GK, à GP, ò (*por la 35. l. 1.*) GQ, à GP; assi el solido GQS, serà al mesmo GPS: y teniendo los solidos EGS, y GQS, una mesma razon al solido GPS; serà (*por la 9. l. 5.*) el solido EGS, igual al solido GQS, ò al solido GKS (*29.*) esto es (porque las basas GK, AO (*por construcion*) ſon iguales y ſemejantes) al ſolido AOS (*29.*)

En ſegundo caſo, que los paralelepipededos dichos tengan los lados obliquos à las baſas EG, AO. Imaginanſe ſobre ellas paralelepipedos cuyos lados ſean perpendiculares à dichas baſas con la altura S: eſtos ſeràn iguales à los obliquos (*29. y 30.*) conque ſiendo (*por el primer caſo*) los paralelepipedos rectos iguales, lo ſeràn tambien los obliquos (*a. 1.*) lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion XXXII.

Los paralelepipedos de una meſma altura, eſtàn en la meſma razon que ſus baſas.

Eſta Propoſicion ſe infiere de la 25. donde dividido como dice el paralelepipedo en dos, quedan de alturas iguales.

Theorema Proposicion XXXIII.

Los paralelepipedos ſemejantes eſtàn en razon triplicada de la de ſus lados homologos.

Sean (*en la fig. 3.*) los paralelepipedos A H; CM, CM, ſemejantes, todos los planos que le terminan ſeràn ſemejantes (*d. 9.*) y (*por la d. 1. l. 6.*) AB, serà à BC, como EB, à BO; y como FB, à BG; aſſi EB, à BO; y (*por la meſma*) los angulos comprendidos de eſtos lados ſeràn iguales; de que ſe ſigue que los paralelepipedos AH, CM, ſe podràn colocar de genero, que los angulos iguales CBO, ABE, ſean opueſtos, haziendo AB, CB, linea recta, como tambien EB, OB (*14. y 15. l. 1.*) y prolongando los lados de los paralelepipedos haſta encontrarſe en K, P, L, R, &c. ſe tendràn los paralelepipedos KB, PO, que hazen el paralelepipedo KO; y KB, AH, otro ſemejante à el (*d. 9.*) como tambien PO, CM, un ſolo paralelepipedo.

Demonſtracion. El ſolido HA, es al ſolido KB, como la baſa AE, à BR (*25.*) eſto es como AB, à BC, (*1. l. 6.*) eſto es (por lo ſupueſto arriva) como EB, à BO, eſto es (*11. l. 6.*) como EC, à BQ, quiero decir como el meſmo ſolido KB, al ſolido PO. Que los tres ſolidos HA, KB, PO; continuen eſta razon. Serà aora el ſolido KB, à PO, como la baſa BR, à BQ (*25.*) eſto es, como EB, à BO (*1. l. 6.*) quiero decir FB, à BG; eſto es (*por la 1. l. 6.*) como el plano FC, à BS; eſto es como el meſmo ſolido PO, à CM (*25.*) conque los quatro ſolidos HA, KB, PO,

CM,

CM, estàn en razon continua: luego la razon del primero AH, al quarto CM, es triplicada de la razon del primero HA, à KB, segundo (*d. 10. l. 5.*) esto es de la razon de AE, à BR (*25.*) esto es de las razones de los lados homologos AB, à BC (*1. l. 6.*) Que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XXXIV.

Los paralelepipedos iguales tienen las basas y alturas reciprocas: y los que tienen las basas y alturas reciprocas, son iguales.

Primeramente si (*en la fig. 4.*) los paralelepipedos BM, CK, son iguales, con los lados rectos à las basas, y de alturas iguales; la cosa es evidente (*32.*)

Pero si las alturas son desiguales; cortese de la mayor FC; FE, igual à BA; y tirese por el punto E, el plano EL, paralelo à la basa KF; y serà la basa AM, à FK, como el solido BM, al solido EK (*32.*) esto es porque (por suposicion los solidos BM, CK, son iguales) como el solido CK, al solido EK; esto es (*por la 25.*) como el plano CG, à EG; esto es (*por la 1. l. 6.*) la altura CF, à EF; quiero decir, à BA; su igual y por con-

consequencia reciprocas : que es lo que se devia demonstrar.

En segundo caso si los paralelepipidos tienen los lados obliquos à las basas, se construiràn sobre las mesmas basas con la mesma altura, los paralelepipidos en angulos rectos; y estos seràn iguales à los que estàn en angulos obliquos *(29. y 30.)* y porque *(por el primer caso)* los primeros tienen las basas y alturas reciprocas, tambien las tendràn los otros. Que es lo que se devia demonstrar.

En tercer caso, si los paralelepipedos tienen las alturas desiguales, y los lados rectos à las basas. Cortese de la mayor C F; la E F, igual à B A; y serà el solido B M, à E K, como la basa A M, à F K *(32.)* esto es *(por la suposicion)* como C F, à B A; quiero decir *(por construcion)* como C F, à E F; esto es *(por la 1. l. 6.)* el plano C G, à E G; esto es *(por la 25.)* como el solido C K, al mesmo E K: luego los solidos B M, y C K, tienen una mesma razon al solido E K; y por consequencia seràn iguales *(9. l. 5.)* que es lo que se devia demonstrar. Luego los paralelepipedos iguales, &c.

COROLARIOS.

Lo que se ha demonstrado de los paralelepi-

pi-

pipedos en la 29. y 30. 31. 32. 33. y 34. conviene tambien à los prismas triangulares que son mitades de los paralelepipedos (*28.*) luego

1. Los Prismas triangulares de una mesma altura, estàn en la mesma razon que sus basas.

2. Y si fueren semejantes estaràn en razon triplicada de la razon de sus lados opuestos à angulos iguales.

3. Si fueren iguales tendràn las basas y alturas reciprocas: y si tienen las basas y alturas reciprocas seràn iguales.

La Proposicion 35. es muy dificultosa, y sirve para demonstrar la siguiente, la qual demonstraremos sin ella.

Theorema Proposicion XXXVI.

Si tres lineas estàn en razon continua, el paralelepipedo hecho de estas tres, serà igual al paralelepipedo equiangulo, que tiene todos sus lados iguales à la de en medio.

Sean (*en la fig. 5.*) las tres lineas A, B, C, en razon continua, y que el paralelepipedo EH, tenga el lado EF, de la basa DF, igual à la linea A; y el otro ED, igual à C; y y el lado insistente en la basa, igual à la media proporcional B; y se tendrà el paralelepipedo HE, hecho de las tres rectas A, B, C; y que el paralelepipedo IN, tenga los tres lados LX, IX, XM, y los demas iguales à la media B; y que el angulo X, sea igual al angulo solido E, y se tendrà el paralelepipedo IN, hecho de la media B, y equiangulo al primero; digo, que seràn tambien iguales.

Demonstracion. Porque (*por suposicion y construcion*) FE, es à LX; como reciprocamente IX, à DE; las basas DF, IL, seràn iguales (*14. l. 6.*) y porque los angulos solidos E, y X, son iguales, si se pone uno en otro convendràn (*d. 11.*) Y por esta razon, y por la igualdad de las rectas EG, XM, los puntos G, y M, se ajustaràn. Esto es que el uno caherà sobre el otro; de que se sigue que las alturas de los dos solidos seràn una mesma; esto es si se baxaren de dichos puntos M, y G, que convienen, perpendiculares à los planos de las basas, que serian iguales: luego (*por la 31.*) los solidos EH, IN, seràn iguales. Que es lo que se devia demonstrar.

THEO-

Theorema Proposicion XXXVII.

Si quatro lineas son proporcionales los paralelepipedos semejantes y semejantemente descritos de estas lineas seràn proporcionales: y si los paralelepipedos semejantes y semejantemente descritos son proporcionales, las lineas lo seràn tambien.

Esta proposicion consta de la 34. del 5. Porque las razones de los paralelepipedos seràn duplicadas de las razones que se pusieren iguales, que son las de las lineas.

Y la contraria consta de la 35. l. 5. y se verificarà esto de qualesquiera cuerpos en el Libro 12.

La Proposicion 38. y 39. no son essenciales.

Theorema Proposicion XL.

Si dos Prismas estàn de alturas iguales, y que el uno tenga por basa un paralelogramo duplo de la del otro, que sea triangular; los prismas seràn iguales.

Sean los prismas F O A, X K P (*de la fig. 6.*) con

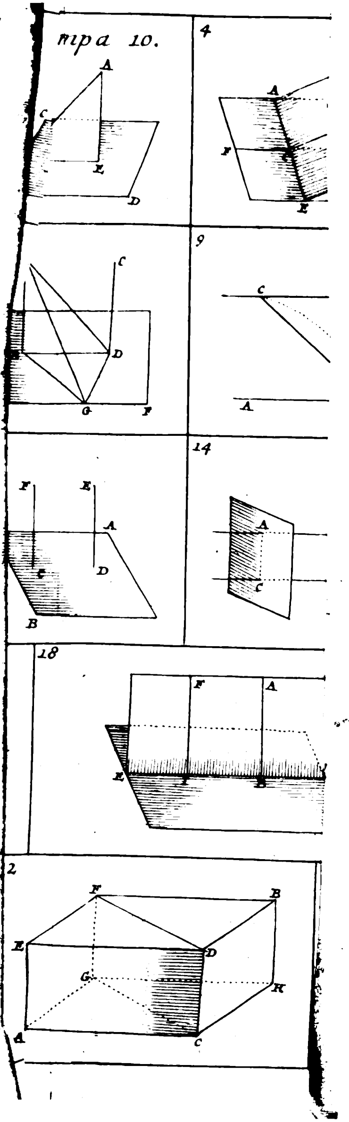
con las alturas G O, Q K, iguales y que el primero tenga el paralelogramo O B, por baſa, duplo de la baſa triangular I K L, del otro; digo, que ſeràn iguales.

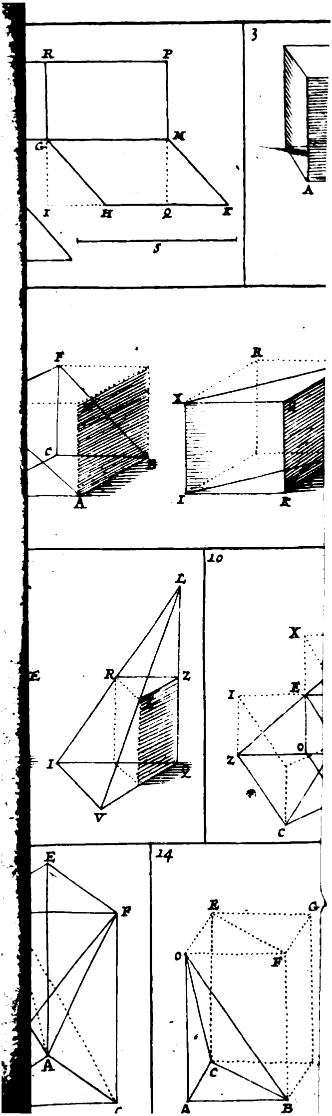
Demonſtracion. Si ſe acavan los paralelepipedos K R, F A; por la igualdad de las baſas y alturas, ſeràn iguales (*31.*) luego los priſmas que ſon ſus mitades, ſeràn tambien iguales (*28.*) Que es lo que ſe devia demonſtrar.

LIBRO OCTAVO.

Que es el doze de Euclides.

HAviendo Euclides tratado en el libro antecedente de los principios fundamentales de los Cuerpos, nos enseña en este sus propiedades y proporciones, y particularmente de las Spheras, Conos, Cylindros, &c. dandonos por sus demonstraciones suficiente doctrina para medir lo solido de cada uno. Y porque en los libros antecedentes, hemos facilitado, y abreviado los Elementos, tanto como se ha podido, lo haremos con mucha mas razon en este libro por ser las demonstraciones de Euclides tan prolixas que desesperan à los principiantes; y assi procuraremos de remediar à este


mpa 10.
A
C
E
D
4
A
F
E
9
C
D
G
F
C
A
14
A
C
F
E
A
D
B
18
F
A
E
B
2
F
B
E
D
G
H
A
C


3
R
P
G
M
I
H
Q
K
S
A
F
C
B
A
R
X
I
K
L
E
R
Z
I
V
10
X
E
I
O
Z
C
E
F
A
14
E
G
O
F
C
A
B

este inconveniente: pero de manera, que no salgamos del rigor que requieren las demonstraciones Geometricas.

DEFINICIONES.

1. Conos y Cylindros semejantes, son aquellos, cuyos Exes y Diametros de sus basas tienen una mesma razon entre si.

2. Si una grandeza ò figura fuere inscripta ò circumscripta, à otra qualquiera, se dice à esta que desgenera ò fenece en ella, quando la inscripta ò circumscripta puede diferir de ella, de una cantidad menor, que otra qualquiera dada, ò que se pueda dar.

La declaracion de esta definicion se hallarà mas clara en el Lemma para la 2.

Theorema Proposicion I.

Los poligones ſemejantes inſcriptos en los Circulos, tienen la razon duplicada de la de ſus diametros.

Sean los poligones (*de la fig. 7.*) inſcriptos en los circulos AF, IC; digo, que eſtaràn en razon duplicada de la de ſus Diametros AF, IC; tirenſe las rectas, AO, BF; IR, y LC.

Demonſtracion. Porque los poligones ſe ſuponen ſemejantes, los angulos OBA, RLI, ſeràn iguales, y los lados OB, BA, proporcionales à los lados RL, LI, (*d. 1. l. 6.*) de que ſe ſigue, que los triangulos OAB, RIL, tendràn los angulos en O, y R, iguales (*6. l. 6.*) conque los angulos BFA, y LCI, que eſtàn ſuſtenidos de unos meſmos arcos BA, LI, ſeràn iguales (*21. l. 3.*) y los angulos FBA, GLI, comprendidos en un ſemicirculo ſon rectos (*31. l. 3.*) y por conſequencia iguales, y aſſi los otros FAB, CIL, ſeràn tambien iguales (*c. 1. 32. l. 1.*) como los triangulos equiangulos y ſemejantes entre ſi (*4. l. 6.*) de que ſe infiere que BA, ſerà à LI, como AF, à CI; y porque los poligonos ſon ſemejantes (*por ſuppoſicion*) tendràn la razon duplicada de la de ſus lados BA, LI (*20. l. 6.*) eſto

es

es como ſe ha monſtrado ya, de la razon de los diametros AF, IC. Luego los poligonos, &c.

COROLARIO.

De aqui ſe infiere que los ambitos de los poligonos inſcriptos en los circulos, eſtàn entre ſi como ſus diametros. Porque haviendoſe monſtrado que AB, es à LI, como AF, à IC; tambien ſerà OB, à LR, como AF, à IC, y aſſi de los demas. Luego *(por la 12. l. 5.)* todos los lados juntos, ſeràn à todos los lados juntos; eſto es el ambito al ambito, como AF, à IC.

LEMMA.

Para la Propoſicion ſegunda.

En eſte Lemma ſe demueſtra, que los poligonos inſcritos en los circulos, deſgeneran en el circulo; eſto es que ſiendo el poligono, por exemplo, de 8. 16. 32. ò de mas lados, ſiempre ſe podrà dividir la reſta de la circumferencia por mitad, y hazerlo de otros tantos; de ſuerte que la figura ſe vendrà ſiempre mas acercar al circulo, haſta deſgenerar ò convertirſe en el. Y lo meſmo ſe entenderà de qualquiera figura ò cuerpo inſcripto ò cir-

circumscripto à otro, como se demonstrarà despues.

Si una cantidad es menor que un circulo, se podrà inscrivir en dicho circulo un polígono mayor que esta cantidad.

Sea propuesto el circulo *(de la fig. 8.)* y en el inscripto el quadrado A C B D; y siendo este la mitad del circumscripto (porque queriendo, seria facil de demonstrar que los triangulos A Z D, A O D, son iguales, provando primero que Z O, es un paralelogramo y que *(por la 34. l. 1.)* la diagonal A D, le divide en dos igualmente; y assi de los otros: y por consequencia el quadrado inscripto mitad del circumscripto) si se quita aquel del circulo, es evidente que se quitarà mas de su mitad. Dividase cada arco por mitad en E, K, I, y H; *(30. l. 3.)* y tirando las lineas A K, K D, y los demas, quedarà inscripto un octagono. Tirese por el punto E, la F G, paralela à A C *(31. l. 1.)* y prolongando las rectas B C, D A, hasta encontrarse la F G, en G y F; C F, serà un paralelogramo *(d. 36. l. 1.)* y siendo el triangulo C E A, su mitad *(41. l. 1.)* es evidente que serà mas de la mitad del segmento C E A: Y de la mesma manera se demonstrarà que cada triangulo de los seg-

ſegmentos es mayor que la mitad de ſu ſegmento. De que ſe ſigue, que ſi ſe quitan todos eſtos triangulos, que ſon cada uno mas de la mitad de ſu ſegmento, ſe quitarà mas de la mitad de la reſta del circulo; y aſſi ſi ſe dividen al infinito los arcos que ſe quedan, de ſuerte que la figura que ſe inſcriviere vaya ſiempre augmentando del duplo de los lados de la inſcripta; demonſtrarè ſiempre de la meſma manera, que ſe irà quitando ſiempre mas de la mitad de la reſta: luego lo que quedare, ſerà menor de qualquiera cantidad que ſe diera menor que el circulo; y por conſequencia, los poligones desgeneraràn, ò feneceràn en los circulos (*d.* 2.) Que es lo que ſe devia demonſtrar.

PORISMA Ò THEOREMA Univerſal.

Si las figuras que ſe inſcrivieren (en A, B,) deſgeneran en ellas, la razon que tubieren ſiempre las inſcriptas, tendràn las figuras en las quales eſtubieren inſcriptas.

R
A B X Z
C F

Sea la razon de X, à Z, la que las inſcriptas tienen ſiempre entre ſi; digo, que la razon de A, à B, que es de las figuras donde ſe incriven, ſerà la miſma que la que tienen ſiem-

V 3 pre

pre X, Z. Y si esto se niega, sea la razon de las primeras A, à B, mayor que la de X, à Z. Luego alguna otra cantidad, como R, menor que la figura A, serà à la figura B, como X, à Z; respecto que las inscriptas (*por suposicion*) desgeneran en las figuras A, y B; y assi se podràn hallar algunas figuras inscriptas en A, y B; las quales diferiràn de ellas, de una cantidad menor, que R, difiere de la figura B (*d. 2.*) y sean estas C, y F; luego C, serà mayor que R; y (*por la 8. l. 5.*) havrà mayor razon de C, à B, que de R, à B; esto es como se ha supuesto que de X, à Z; esto es (*por la segunda suposicion*) que de C, à F, siguese (que estando C, en mayor razon con B, que con F) que la figura B, serà menor que la inscripta en ella F; y el todo menor que su parte implica: y de la mesma manera demonstraremos que la razon de B, à A, no puede ser mayor que la de Z, à X; luego la razon de A, à B, es igual à la de X, à Z. Que es lo que se devia demonstrar.

THEOREMA PROPOSICION II.

Los circulos estàn en razon duplicada, de la de sus diametros.

Los poligonos semejantes inscriptos al infininito en los circulos, tienen siempre la razon duplicada de la de sus diametros *(1.)* Pero los poligonos inscriptos en los circulos al infinito desgeneràn ò fenecen en ellos *(por el Lemma antecedente)* Luego *(por el Porisma universal)* los circulos tendràn tambien la razon duplicada de la de sus diametros. Que es lo que se devia demonstrar.

Las Proposiciones 3. y 4. son prolixas, y dificultosas, y no tienen otro uso que para demonstrarla 5. la qual demonstraremos mucho mas facil sin ellas.

LEMMA I.

Para la Proposicion quinta.

Si à dos Pyramides triangulares (como las de la fig. 9.) *las cortan dos planos* (OSE, RXZ) *paralelos à las basas, dividiendo los lados semejantes* (CF, QL) *proporcionalmente en* (E, y Z) *estaràn los planos* (OSE, RXZ) *en la mesma razon que sus baças.*

Demonstracion. Porque los planos OSE, ABC, se cortan con los planos BFC, AFB, AFC, seràn las lineas SE, BC, y OS, AB, como OE, AC, paralelas (*16. l. 11.*) siguese (*por la 10. l. 11.*) que los angulos OSE, ABC; SOE, BAC, y OES, ACB, seràn iguales de dos en dos: de que se infiere que las secciones y las basas son semejantes (*4. l. 6.*) y de la mesma manera demonstraremos que la seccion RXZ, y la basa IVQ, son semejantes. Luego la razon de la basa ABC, à la seccion OES, serà duplicada de la razon de los lados, BC, à SE; y la razon de IVQ, à RXZ, duplicada de la razon de VQ, à XZ. Pero la razon de BC, à SE, es como VQ, à XZ (porque siendo BC, à SE, como CF, à EF (*c. 1. de la 4. l. 6.*) esto es, por suposicion, como QL, à ZL; quiero decir (*por el mesmo Corolario*) como VQ, à XZ.) Luego ABC, serà à OSE, como IVQ, à RXZ (*35. l. 5.*) Que es lo que se devia demonstrar.

LEMMA II.

Los prismas que se inscivieren al infinito en la Pyramide (ZCAF, fig. 10.) *que tiene por basa un triangulo, desgeneran en ella.*

Dividase un lado de la pyramide en algunas partes iguales como AF, en AB, BG, y GF; y tirando por los puntos de las divisiones B, y G; las secciones GDN, y BEP, pa-

paralelas à la basa ZCA; se imaginaràn inscriptos en la pyramide los prismas BEPMAO, y GDNKBQ, y continuando estas secciones fuera de la pyramide, se imaginaràn prismas circumscriptos à la pyramide, como CIBA, PXGB, y NHFG: digo, que los excessos de los circumscriptos à los inscriptos, seràn los solidos IM, XK, y HG, los quales demonstrarè que tomados juntos son iguales al prisma CIBA.

Demonstracion. Porque el solido HG, es igual à DB (*25. l. 11. y Corolarios de la 34.*) HG, y XK, seràn iguales à PXGB; esto es (*por la mesma*) à MEBA. Luego los tres HG, XK, y IM, son iguales al total CIBA (*a. 9.*) Conque si AF, se dividiera al infinito en partes iguales, de suerte que el numero de los prismas se augmentase al infinito, es cierto que AB, vendria ser menor que qualquiera cantidad dada: (*consta del Scholio de la 18. l. 6.*) de que se sigue, que el prisma CIBA, vendrà tambien à ser menor que qualquier dado (*consta de la 25. l. 11.*) y assi tambien el excesso de los prismas circumscriptos, à los inscriptos serà menor que qualquiera cantidad dada; y aun mucho mas de la pyramide ZCAF, que es parte de los prismas circumscriptos à ella; luego los prismas inscriptos desgeneran en la pyramide. Que es lo que se devia demonstrar.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION V.

Las pyramides triangulares de una meſma altura, eſtàn en la meſma razon que ſus baſas.

Sean las pyramides (*de la fig. 11.*) A Q R P, E S X Z, que tengan una meſma altura.

Dividaſe en cada una uno de ſus lados en qualeſquieras partes, de ſuerte, que haya tantas en el uno como en el otro, y tirando por cada punto de las diviſiones ſecciones paralelas à las baſas; ſe imaginaràn inſcriptos en cada pyramide tantos priſmas triangulares en una, como en otra, y iguales en altura.

Demonſtracion. Porque los priſmas L A, I E, tienen una meſma altura, ſerà el priſma L A, à I E, como la baſa L O B, à I N K (*c. 1. de la 34. l. 11.*) eſto es (*por el primer Lemma para eſta*) como la baſa Q R A, à S X E. Y de la meſma manera ſe demonſtrarà que cada priſma inſcripto en la pyramide Q P A R, es à cada priſma inſcripto en la pyramide S Z E X, como la baſa Q A R, à la baſa S E X; luego tambien todos juntos, ſeràn à todos juntos, como la baſa à la baſa (*12. l. 5.*) y eſtos deſgeneran en las pyramides (*Lemma 2. para eſta*) ſigueſe que (por el poriſma univerſal)

ſal) eſtas eſtaràn tambien en la meſma razon que ſus baſas. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

Theorema Proposicion VI.

Las pyramides de igual altura eſtàn en la meſma razon que ſus baſas.

Sean las pyramides *(de la fig. 12.)* A B X, C F O Z. Dividanſe ſus baſas en triangulos como A, B; C, F, y O, y las pyramides totales en pyramides triangulares, exemplo A X, y las demas.

Demonſtracion. La pyramide A X, es à O Z, como la baſa A, à O (*5.*) y la pyramide B X, à O Z, como B, à O; de que ſe infiere que las dos juntas A X, B X; eſto es toda la A B X, es à O Z, como A, y B, juntas à O *(24. l. 5.)* y por la meſma razon la pyramide A B X, es à la pyramide F Z, como A B, à F (*5.*) y A B X, es à C Z, como la baſa A B, à C (*24. l. 5.*) luego (por la miſma) A B X, ſerà à las tres juntas O Z, F Z, y C Z; eſto es à toda la pyramide C F O Z, como A B, à O F C. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION VII.

Toda pyramide es tercia parte del prisma que tiene la mesma basa, y la mesma altura.

Sea en el primer caso (*en la fig. 13.*) la pyramide triangular B G A C, en la mesma basa y altura con el prisma E B C; digo, que serà la tercia parte del prisma. Tirense B F, A O, y A F.

Demonstracion. Porque los triangu los B F C, B F O, son iguales (*34. l. 1.*) la pyramide B F C A, serà igual à la pyramide B O F A (*5.*) Y por la mesma razon la pyramide O E A F serà igual à la pyramide O B A F; esto es à la pyramide B O F A, porque son una mesma pyramide; siguese que B F C A, y O E F A, son tambien iguales (*a. 1.*) conque todas las pyramides B F C A, O E F A, O B A F, y B O F A, lo seràn entre si (*A. 1.*) luego las tres juntas son triplas de la una B F C A. Pero las tres constituyen el prisma: Siguese que este serà triplo de la pyramide B F C A; esto es (*por la 5. de este*) de la pyramide B G A C. Que es lo que se devia demonstrar.

En segundo caso si el prisma fuese poligono, esto es si tubiera por basa un poligono, en tal caso

caso se dividiera la basa en triangulos, y el prisma en prismas triangulares, y siguiendo la construcion y demonstracion de arriba se hallarà que cada pyramide triangular es tercia parte de su prisma: Siguese que la pyramide poligonal serà la tercia parte de su prisma poligonal *(12. l. 5.)* luego toda pyramide &c.

Theorema Proposicion VIII.

Las Pyramides semejantes estàn en razon triplicada de la de sus lados homologos.

Sean primeramente (*en la fig. 14.*) las pyramides O A C B, K H I N, triangulares: digo, que estaràn en razon triplicada de la de sus lados homologos. Acavense los paralelogramos A M, H Q, y sobre ellos los paralelepipedos A G, H L, con la mesma altura que las pyramides, y siendo estas semejantes los prismas lo seràn tambien (*lo que consta de la d. 9. l. 11.*) tirense E F, R P, y por E C, y F B, el plano E B, como por R I, y P N, el plano P I, y quedaràn divididos los paralelepipedos en dos prismas iguales *(28. l. 11.)* y el uno serà triplo de la pyramide O A C B, y el otro de K H I N, *(7.)* de que se infiere, que cada dos juntos, esto es que cada paralelepipedo sera sextuplo de su pyràmide; siguese que las pyramides estàn

en

en una meſma razon con los paralelepipedos. Pero ſu razon es triplicada de la de ſus lados homologos, A B, H N (*33. l. 11.*) luego lo ſerà tambien la de las pyramides. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

Si (en ſegundo caſo) las pyramides fueſſen poligonales, ſe pudieran dividir en triangulares y ſeguir la meſma demonſtracion. Luego las pyramides ſemejantes, &c.

Theorema Proposicion IX.

Las Pyramides iguales tienen las baſas y alturas reciprocas: y las que tienen las baſas y alturas reciprocas ſon iguales.

Sean en primer caſo (*en la fig. 15.*) las pyramides triangulares B A C O, H K N L: acavenſe los paralelepipedos como dixe en la antecedente, y en ella hè monſtrado que los paralelepipedos ſon ſextuplos de la pyramide; conque ſi las pyramides ſon iguales lo ſeràn tambien los paralelepipedos (*a. 6.*) y las alturas de los paralelepipedos H K, B A, ſon la miſma, que las de las pyramides: como las baſas B E, H R, duplas de las baſas de las pyramides B C O, H N L (*34. l. 1.*) de que ſe infiere, que les ſon proporcionales (*18. l. 5.*) y ſiendo (por la igualdad de los paralelepipedos) B E,

à

à HR, como reciprocamente H K, à BA (*34. l. 11.*) ſerà tambien la baſa B C O, à H N L, como reciprocamente la altura HK, à B A. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

Si las pyramides tienen las baſas poligonales ſe reduciràn à triangulares, y eſtas ſeràn iguales (*6.*) Pero las pyramides reducidas aſſi (por lo demonſtrado) reciprocan las baſas con las alturas. Luego tambien las pyramides poligonales tendràn las baſas y alturas reciprocas. Que es lo que ſe devia demonſtrar.

En ſegundo caſo, ſupueſto que la baſa B C O, es à HNL, como H K, à B A: ſerà tambien BE, à H R, còmo HK, à BA (*18. l. 5.*) ſigueſe (*por la 34. l. 11.*) que los paralelepipedos BF, HP, ſeràn iguales; conque lo ſeràn tambien ſus ſextas partes que ſon las, pyramides BACO, HKNL (*a. 7.*) Luego las pyramides iguales, &c.

COROLARIOS.

Lo que ſe ha demonſtrado de las pyramides en la 6. 8. y 9. conviene tambien à qualquier priſma, ſiendo ellos triplos de las pyramides (*7.*) que tienen la meſma baſa y altura. Luego

1. Las priſmas de igual altura, eſtàn en la meſma razon que ſus baſas.

2.

2. Los prismas semejantes estàn en razon triplicada de la de sus lados homologos.

3. Los prismas iguales tienen las basas y alturas reciprocas: y los que tienen las basas y alturas reciprocas son iguales.

Estos Corolarios no los trahe Euclides, pero porque no son de los menores tratados de los solidos rectilineos, se han puesto aqui; por exemplo para saver sus alturas, su contenido, &c.

LEMMA.

Para la Proposicion decima.

Las pyramides y los prismas, que se inscrivieren al infinito en los conos y cylindros desgeneran en ellos.

Este se demuestra, como el Lemma 2. de la Proposicion 2. con la ayuda de la 6. y el Corolario 1. de la 9. que como allí los planos se inscriven al infinito en los circulos, y desgeneran en ellos assi aqui las pyramides, y los prismas que tienen estos planos por basas, se inscriven y desgeneran en ellos.

Theorema Proposicion X.

Todo cono es tercia parte del cylindro que tiene la mesma basa y altura.

Imaginese que (*en la fig. 1. Estampa 12.*) en la basa C L, se inscrive qualquier poligono regular, y sobre el como basa en el cono la pyramide, y serà la pyramide la tercia parte del prisma (*7.*) Y si se inscriven en el circulo poligonos al infinito mayores y de mas lados, segun el Lemma segundo de la Proposicion segunda, y sobre ellos en los conos pyramides, y en los cylindros prismas, siempre serà la pyramide la tercia parte del prisma, y como van desgenerando los poligonos en los circulos, assi desgeneraràn las pyramides en los conos, y los prismas en los cylindros (*Lemma antecedente*) luego (*por el porisma universal*) el cono serà la tercia parte del cylindro. Que es lo que se devia demonstrar.

Theorema Proposicion XI.

Los conos de una mesma altura estàn en la mesma razon que sus basas. Y lo mesmo succede con los cylindros.

Las pyramides inscriptas en los conos de igual altura eſtàn entre ſi como ſus baſas *(6.)* Pero *(por el Lem. para la 10.* las pyramides deſgeneran en los conos. Luego *(por el poriſma univerſal)* los conos ſcràn tambien en la meſma razon que ſus baſas. Y ſiendo los cylindros triplos de los conos, que tienen la meſma baſa y altura, eſtaràn tambien en la meſma razon que ſus baſas. Luego los conos de una meſma altura, &c.

COROLARIO.

De aqui ſe infiere, y ſe demonſtrarà de la meſma manera, que los priſmas y cylindros de una meſma altura, eſtàn en la meſma razon que ſus baſas, como tambien todos los cuerpos cylindricos de meſma altura; eſto es los que ſe producen de qualquier plano circular ò poligonal en la meſma altura, eſtaràn en la meſma razon que ſus baſas. Y lo meſmo ſuccede en qualquiera pyramide ò cono de una meſma altura, &c.

THEO-

THEOREMA PROPOSICION XII.

Los conos y cylindros ſemejantes eſtàn en razon triplicada de la razon de los diametros de ſus baſas.

Sean los conos B A F, Q Z R (*fig. 1. y 2.*) digo, que eſtaràn en razon triplicada de la de ſus diametros B F, Q R. Inſcrivanſe en los circulos de las baſas poligonos ſemejantes, y ſobre ellos pyramides en los conos; las pyramides ſeràn tambien ſemejantes, lo que (ſi ſe quiſiere) ſerà facil de demonſtrar. Sigueſe que ſu razon es triplicada de la de ſus lados B L, Q E (*8.*) eſto es (*por la 1.*) de la razon de ſus diametros. Pero las pyramides deſgeneran en los conos (*Lemma para la 10.*) Luego la razon de los conos serà tambien triplicada de la razon de ſus diametros B F, Q R (*Poriſma univerſal*) Que es lo que ſe devia demonſtrar.

Y ſiendo los cylindros triplos de los conos ſuccederà lo miſmo. Siguese que los conos ſemejantes, &c.

Theorema Proposicion XIII.

Si un cylindro ſe corta con un plano paralelo à las baſas, cortarà las partes del exe en la meſma razon, que las partes del cylindro.

Eſta ſe demueſtrarà como la 1. del 6. y lo meſmo ſe verificarà de la ſuperficie del cylindro.

Theorema Proposicion XIV.

Los cylindros que eſtàn conſtituidos ſobre baſas iguales, eſtàn en la meſma razon que ſus alturas. Y lo meſmo ſuccede con los conos.

Sean los cylindros(*de la fig. 3. y 4.*)con las baſas MQ, y GH, iguales; digo, que eſtàn entre ſi como ſus alturas LZ, SF. Cortteſe del mayor AR, el cylindro AO, de igual altura à la de CI, los cylindros AO, CI, ſeràn iguales (*11.*)

Demonſtracion. Siendo (*por la prec.*) el cylindro AO, à AR, como la altura LE, à LZ; tambien CI, ſerà à AR, como LE, à LZ; eſto es(porque LE, y SF, ſon, por

con-

construcion iguales) como SF, à LZ, y lo mesmo se demonstrarà en los conos. Luego los cylindros, &c.

COROLARIO.

Tambien se verifica este Theorema de los prismas y pyramides, y la demonstracion es toda la mesma. De los prismas consta del Corolario 1. de la 9. de este y 25. l. 11. y de su Corolario. De las pyramides de esta y de la 7.

THEOREMA PROPOSICION XV.

Los cylindros iguales tienen las basas y alturas reciprocas: y los què tienen las basas y alturas reciprocas son iguales. Y lo mesmo succede con los conos.

Esta Proposicion se demuestra como la 34. del 11. Pero como alli se cita la 32. y 25. aqui se citarà la 11. y 13. de este.

SCHOLIO.

Porque Euclides no ha hablado en los cuerpos de la razon compuesta, la demuestraremos aqui en breve.

1. *El cylindro al cylindro, y el prisma al prisma, tiene la razon compuesta de las razones de sus basas y alturas.*

Sean los cylindros(de la fig. 4. y 5.*) iguales. Cortese del de mayor altura A R; A O, de igual altura à F D (porque en los de mesma altura por si consta) y sea como la basa V T, à M Q, assi F N, à X, y como la altura N D, ò B O, à B R, assi X, à Z, y se demonstrerà que el cylindro F D, es al cylindro A R, como F N, à Z.*

Demonstracion. (Por la 11.) *El cylindro F D, es à A O, como la basa V T, à M Q; esto es (* por construcion*) como F N, à X. Pero el cylindro A O, es à A R, como B O, à B R, esto es (* por construcion*) como X, à Z. Luego (* por la 22. l. 5.*) el cylindro F D, es à A R, como F N, à Z; y de los prismas se demonstrarà de la mesma manera, por el Corolario 1. de la 9. y por el de la 14. Luego el cylindro, &c.*

2. *Tambien el cono al cono y la pyramide à la pyramide, tienen la razon compuesta de las razones de las basas à las basas, y alturas à alturas.*

Demonstracion. Porque son la tercia parte

de

de los cylindros y prismas : lo uno por la 10. y lo otro por la 7.

Las Proposiciones 16. y 17. son muy prolixas y dificultosas, y no sirven que para demonstrar la 18. la qual demonstraremos por un camino mas corto.

L E M M A.

Para la Proposicion diez y ocho.

Los cylindros inscriptos en un hemisphério, desgeneran en el.

Sea (*en la fig. 6.*) P Z I, el mayor circulo del hemispherio (ò mitad de la sphera) y su radio, ò semidiametro, A Z, perpendicular al diametro P I. Cortese A Z, en algunas partes iguales como A M, M N, N Z : y haviendo tirado perpendiculares por los puntos M, y N, &c. se inscriviràn en el semicirculo los rectangulos O K R B, E S H D; que continuados fuera del circulo se acabaràn los rectangulos F I, L B, y Q D, circumscriptos, que seràn todos de igual altura; y los excessos de los circumscriptos à los inscriptos seràn los planos F K, L S, Q D, V H, T R, que tomados juntos seràn iguales al rectangulo F I.

Demonstracion. Porque QD, es igual à DS, (*36. l. 1.*) seràn LS, VH, QD, juntos iguales al rectangulo LB (*a. 9.*) esto es à RO, conque si se les añade à cada uno los planos FK, TR; seràn (*por el dicho ax.*) todos los paralelogramos FK, LS, QD, VH, TR, juntos iguales al rectangulo FI. Y si se imagina aora bolver el semicirculo con los rectangulos al rededor del radio AZ, quedando el fixo; los rectangulos inscriptos EH, OR, produciràn cylindros inscriptos en el hemispherio: y los rectangulos circumscriptos, cylindros circumscriptos, estando el uno sobre el otro. Y como el excesso de los rectangulos circumscriptos, era el rectangulo FI; assi el excesso de los cylindros circumscriptos à los inscriptos serà el cylindro producido de este rectangulo. Pero dividiendo al infinito la altura del cylindro, vendrà ser menor que qualquiera cantidad dada (*consta del Scholio de la 11. l. 6.*) conque tambien el cylindro se irà disminuiendo, que al fin serà menor que qualquiera dada (*13.*) y si el radio se dividiere al infinito en mas partes, y que assi el numero de los rectangulos se augmentasse al infinito; el excesso de los cylindros circumscriptos (que son mucho mayores que el hemispherio que es parte de ellos) à los inscriptos, vendria ser menor que qualquiera dada: luego los cylindros inscriptos en el hemisphe-

rio

rio desgeneran en el (*d. 2.*) que es lo que se devia demonstrar. Y haviendolo monstrado en el hemispherio, es evidente que succederà lo mismo en la sphera entera.

COROLARIO.

Demonstraràse de la mesma manera que los cylindros inscriptos en los conos, &c. desgeneran en ellos.

THEOREMA PROPOSICION XVIII.

Las spheras estàn en razon triplicada de la de sus diametros.

Sean las spheras (*de la fig. 7.*) digo, que estàn en razon triplicada de la de sus diametros BK, RZ. Imaginense inscriptos (*como en el Lem. anteced.*) en cada circulo de sus mayores circumferencias rectangulos de igual altura, tantos en el uno como en el otro, y que buelvan al rededor de sus radios, AB, IR, quedando ellos fixos; que assi se inscrivirán en cada hemispherio igual numero de cylindros, estando el uno sobre el otro.

Demonstracion. Porque K C, es à C F, como CF, à C B (*c. de la 13. l. 6.*) serà la razon de KC, à GB, duplicada de la razon

de

de K C, à CF (*d. 10. l. 5.*) esto es de la razon de F C, à C B. Y assimismo la razon de Z E, à E R, serà duplicada de la razon de XE, à E R; y siendo por lo dicho K C, à CB, como Z E, à E R; serà tambien (*por la 35. l. 5.*) F C, à BC, como XE, à E R. Pero B C, es à C O, como R E; à E S; conque (*por la 22. l. 5.*) serà en razon de igualdad F C, à C O, como X E, à E S. De que se sigue que los cylindros seràn semejantes (*d. 1.*) y por consequencia tendràn la razon triplicada de la de los diametros de sus basas F I, X V. (*12.*) como tambien de la de sus semidiametros F C, XE. Pero la razon de F C, à X E, es la mesma que la que tienen entre si los diametros de las spheras B K, R Z (porque como se ha monstrado ya que F C, es à X E, como C O, à E S; esto es como B K, à R Z, equimultiplices de C O, E S, por construcion) se sigue que la razon de los cylindros F L, X Q, serà triplicada de la razon de los diametros BK, R Z. Y de la mesma manera demonstraremos, que cada cylindro inscripto en el un hemispherio, es à cada cylindro inscripto en el otro hemispherio en la razon triplicada de la de los diametros B K, R Z (*12. l. 5.*) y assi porque el agregado, ò suma de los cylindros desgeneran en los hemispherios (*por el Lemma anteced.*) la razon de los hemisphepherios, como de las spheras, estarà triplicada de la de sus diametros *(por el porisma universal)* que es lo que se devia demonstrar.

COROLARIO.

Por aqui se conoce la Proporcion de los diametros à sus Spheras; esto es que si el diametro de la menor fuere de 1. pie, y el de otra mayor de 10. que continuando la razon de 1. à 10. hasta quatro terminos, como 1. 10. 100. 1000. serà en tal caso como 1. primer termino à 1000. quarto, assi la menor Sphera à la mayor, que es la razon triplicada: de modo que saviendo el diametro, y contenido de una Sphera, se savrà el de qualquiera otra, siendo conocido su diametro. Y en mi obra intitulada el Ingeniero se halla cumplidamente la Geometria practica, donde ay suficiente doctrina para medir lo plano y solido de toda figura.

Aqui da Euclides fin à su Libro 12. no obstante que tiene hasta 15. (sin otros tres que llaman los dados de Euclides) pero el 14. y 15. como el 7. y 8. &c. no son essenciales en nuestra doctrina, y assi los excuso; pero no el traher aqui algunos Problemas

cu-

curiosos, con los quales se pueda construir qualquiera figura dada una abertura de compas, lo que acostumbran à proponer algunos Geometras, hallandose ya consumados en esta facultad.

Problema Proposicion I.

Con una abertura de compas dada, dividir una linea recta terminada, en media y extrema razon.

Sea dada la A (fig. 8.) igual à la abertura del compas, y B C, la linea à dividir. Continuese esta por uno y otro lado, haziendo despues la B D, y B E, cada una igual de la abertura dada: y dividiendolas en dos igualmente en los puntos F, y G, (10. l. 1.) *para hazer una intersecacion, y dar por ella la perpendicular B H, al infinito* (11. l. 1.) *hagase lo mesmo en el punto C, levantando la perpendicular C I; y dividiendo los angulos H B C, y B C I, en dos igualmente* (9. l. 1.) *por las lineas, C H, B I, que se continuaràn hasta cortar B H, y C I, en H, y I, y se darà la H I; dividese la B H, en dos igualmente* (10. l. 1.) *lo que serà facil si el intervalo del compas es mayor que la mitad de la linea, y no siendolo se tomarà del extremo B, la B K, del*

del intervalo del compas, y del extremo H, la HL; y la resta L K, se dividirà en dos igualmente en M (y en caso de no alcanzar, se continuarà de tomar por uno y otro lado partes hasta que se pueda dividir la resta) dese MC, y continuada la IC, se dividirà el angulo NCM, en dos igualmente (9. l. 1.) con la CO, que se continuarà hasta cortar la HB, continuada en O; donde se levantarà la perpendicular OP, dividase assi mismo el angulo BOP, en dos igualmente con la OR (9. l. 1.) que corte la BC, en R; digo que en este punto estarà dividida la BC, como se pide.

Demonstracion. *Los triangulos HBC, ICB, que tienen sus angulos en B, y en C, rectos; Y los angulos HCB, IBC, medio rectos* (por construcion) *y el lado BC, comun; seràn iguales (26. l. 1.) esto es CI, à BH, los quales son paralelos (28. l. 1.) de que se sigue que HI, BC, tambien lo seràn (33. l. 1.) pero siendo en el triangulo HCB, el angulo HBC, recto, y HCB, medio recto, lo serà assi mismo el angulo CHB (32. l. 1.) de que se infiere que HB, BC, son iguales (6. l. 1.) luego el paralelogramo IB, es un quadrado (34. y d. 30. l. 1.) y siendo IN, paralela à HO, los angulos alternos MOC, OCN, seràn iguales (29. l. 1.) Pero este es igual à OCM* (por construcion) *luego lo seràn tambien MCO, y COM (6. l. 1.) y MC, à MO*

(6.

(6. l. 1.) como tambien BO, BR (32. y 6. l. 1.) de que se sigue que BC, està dividida en R, en media y extrema razon (30. l. 6.) que es lo que se necessitava hazer.

COROLARIO.

Siguese de esta Proposicion que con qualquier abertura de compas, se puede levantar una perpendicular en un punto de una linea, y dividir una linea en dos igualmente, y construir un quadrado.

PROBLEMA PROPOSICION II.

Desde un punto, dada una abertura de compas, tirar una linea recta paralela à otra recta dada.

Sea dado el punto B (fig. 9.) y la abertura A, y pretendiendo tirar una paralela à CD; si la abertura del compas fuesse mayor que la perpendicular que se puede bajar del punto B, sobre la CD, se descrivirà del punto B, como centro la porcion EF, que corta la CD, en E, y F; y se darà la BE, y la FB, al infinito; y dividiendo el angulo EBG, en dos igualmente con la BH (9. l. 1.) digo que esta serà la pararela que se pide.

Demonstracion. *El angulo externo EBG,*

es

es igual à los dos interiores opuestos B E F, E F B, (32. l. 1.) *y siendo los lados B E, y B F iguales* (d. 15. l. 1.) *los angulos lo seràn tambien* (5. l. 1.) *luego aquel serà duplo de qualquiera de los otros dos, siguese que su mitad E B H, serà igual al angulo B E F, y por consequencia B H, paralela à C D* (28. l. 1.)

En segundo caso si la abertura del compas fuesse menor que la perpendicular que se puede baxar desde el punto sobre la recta, à la qual se ha de tirar la paralela, como si la abertura del compas fuesse I, y el punto K, desde el qual no se puede llegar a cortar la L M, à quien se ha de tirar la paralela; se tomarà otro qualquier punto como N, desde donde se puede llegar à cortar la L M, y por el caso antecente, se tirarà à esta la paralela N O, y del punto K, la K P, paralela à N O, y la K P, serà paralela à L M (30. l. 1.) *que es lo que se necessitava hazer.*

SCHOLIO.

Si à la segunda vez no se pudiere desde el punto K, tirar la paralela, à N O; se tirarà à esta desde qualquier otro punto otra, continuando assi hasta poderlo hazer desde el punto dado.

CO-

COROLARIO.

De esta proposicion se infiere, que desde un punto dado fuera de una linea se podrà baxar sobre esta una perpendicular, porque si en el punto K, sobre la K P, se levanta perpendicular K R (por la antecedente) hasta cortar L M, lo serà perpendicular por la (27. l. 1.)

PROBLEMA PROPOSICION III.

De dos lineas desiguales dadas, cortar de la mayor, una parte igual à la mas pequeña con una abertura dada.

Si las dos rectas dadas se juntasen por los extremos, como AP, y AB (fig. 10.) formando angulo con la abertura dada, que supongo ser E; desde A, se cortaràn A G, y A F, iguales, y tirando la F G, se darà del punto B, la B H, paralela à F G (por la antec.) *y la A H, parte de la mayor A P, serà igual à la menor A B* (2. l. 6.) *Que es lo que se ha pedido.*

Si las lineas dadas no formasen angulo como K L, O S; y que de esta ultima mayor que la otra, se quiere cortar una parte igual à ella: del punto K, se tirarà la K Q, paralela à O S (por la citada) haziendola igual à K L, por el caso ante-

ce-

cedente, y se darà del punto K, al punto O, la KO, y de Q, la QR, paralela à OK (por mi segunda) prolongandola hasta cortar OS, en R; y la parte OR, serà la que se pide (34. l. 1.) que es lo que se devia hazer.

PROBLEMA PROPOSICION IV.

Hazer un angulo rectilineo igual à otro dadò, en un punto de una recta, dada una abertura.

Sea el angulo rectilineo dado ABC (fig. 11.) el punto D, en la linea DE, y la abertura F; con esta y centro B, se descrivirà el circulo, GH, que corte la BA, en G, desde este punto se dejarà caer el otro pie del compas sobre la BC, y cayga en C, de donde se descrivirà el circulo GA, el qual cortarà AB, en el punto G, por haverse ajustado à el: dese la GC; y haziendo por la antecedente la linea DL, desde el punto D, igual à BC, se descrivirà desde, el como centro, el circulo IK, y de L, el circulo KM, cortando el primero en K: dense las rectas DK, KL, digo, que el angulo KDL, serà igual al dado ABC (8. l. 1.) que es lo que se devia hazer.

Si el angulo fuere obtuso se obrarà esto sobre el angulo del cumplimiento.

COROLARIO.

De esta Proposicion se infiere que se podrà formar una figura rectilinea equiangular à otra figura dada, con qualquier abertura terminada.

PROBLEMA PROPOSICION V.

En un circulo acomodar una recta igual à otra dada, como, sea menor que el diametro, con una abertura dada.

Sea el circulo ABC (fig. 12. *) la linea D, y la abertura E; tirese en el circulo qualquiera recta BF, la qual sea dividida en dos igualmente en M (por mi prim.) donde se levantarà la perpendicular MC, continuandola hasta cortar la circumferencia en A, y C. Dividase esta en dos igualmente en G, y este punto serà el centro del circulo (* c. de la 1. l. 3. *) dividase tambien la D, en dos igualmente y haziendo desde el centro G, las rectas GH, GL, iguales à la mitad de D (por mi tercera) se levantaràn en los puntos L, y H, las perpendiculares HI, LK, hasta cortar la circumferencia cada una en dos puntos; que ellas seràn iguales (* 14. l. 3. *) y siendo LK, y HI, mitades (* 3. l. 3. *) de estas lineas iguales seràn iguales (* a. 7. *) y tambien paralelas (* 28. l. 1. *) luego lo*

se-

seràn assimismo L H. K I (33. l. 1.) quiero dezir K I, y D: que es lo que se necessitava hazer.

SCHOLIO.

Por esta Proposicion, por la primera, y las demas se pueden formar todas las figuras rectilineas, y reducir unas enotras; como si se quisiere formar un pentagono regular con una abertura de compas, que se descrivirà con esta un circulo, y dividiendo el semidiametro en media y extrema razon (por mi primera) se acomodarà el mayor segmento al circulo por lo demonstrado arriba, y tirando à esta desde el centro dos semidiametros, se tendrà el triangulo maximo del Pentagono (*10. l. 4.*) luego sobre qualquiera recta descriviendo un triangulo equiangulo al del Pentagono, y dividiendo los dos angulos iguales del triangulo isoceles por mitad con una linea recta igual à uno de los lados iguales, se tirarà al extremo de cada una, una recta à los extremos del primer poligon, ò lado desigual, y otras desde su angulo opuesto, y se tendrà formado un Pentagono equiangulo, y equilatero (*11. l. 4*).

Creo tendràn aqui los curiosos, notado, como se ha dado materia sufficiente para hazer-

haẓerſe uno por ſi conſumado en la Mathematica, la qual como dixe à los principios encierra diſtinctas partes, dilatandoſe tanto cada una, que fuera un proceder infinito querer apurar la mas minima; por lo qual devemos dar gracias al Todo Poderoſo: pues diò luz à los hombres paraque tanto profundaſſen en eſta ſciencia.

F I N.

Estampa 12.a